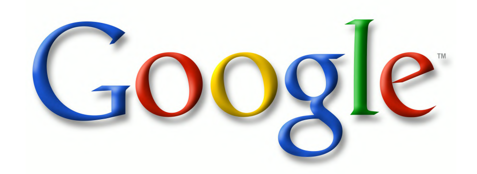










Sammlung Göschen

Statik

II. Teil

Angewandte (techn.) Statik

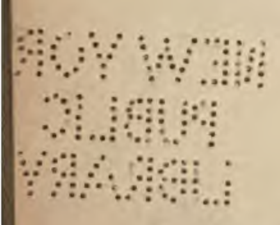
von

W. Hauber
Dipl. Ingenieur

Mit 61 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1904





Spamersche Buchdruckerei, Leipzig

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Kapitel.

Starre Stabverbindungen mit beliebiger Belastung.

II. Kapitel.

Ebene Fachwerke.

S.

III. Kapitel.

Spreng- und Hängwerke.

IV. Kapitel.

Standfestigkeit der Mauern (Pfeiler).

V. Kapitel.

Standfestigkeit der symmetrischen Tonnengewölb

I. Kapitel.

Starre Stabverbindungen mit beliebiger Belastung.

§ 1. Allgemeine Sätze.

Eine Verbindung von starren Stäben heißt starr, wenn ihre Verbindungspunkte (Knotenpunkte) ihre gegenseitige Lage nicht ändern können.

An jedem Stab wirken außer den an ihm in beliebigen Punkten angreifenden äußeren Kräften in seinen Endpunkten Reaktionen, welche von den anstoßenden Stäben hervorgebracht werden. Die Knotenpunkte sind hierbei als Bolzen reibungsloser Scharniere gedacht, an denen die anstoßenden Stäbe drehbar befestigt angenommen seien.

Die Stäbe werden hierbei meist als gewichtlos vorausgesetzt. Bei Berücksichtigung des Eigengewichts eines Stabes läßt sich dieses in vielen Fällen durch zwei parallele Komponenten, die in den Stabenden angreifen, zweckmäßig ersetzen.

Zur Beurteilung der Sicherheit einer aus einer Stabverbindung bestehenden Konstruktion ist in erster Linie die Kenntnis der sämtlichen an irgend einem Stab angreifenden Kräfte erforderlich. Ihre Bestimmung bildet die Aufgabe der „statischen Berechnung“ der Verbindung.

Zu beachten sind hierbei folgende Sätze:

I) Ist eine Stabverbindung im Gleichgewicht, so ist jeder Stab und jeder Knotenpunkt (Bolzen) unter Einfluß der an ihm angreifenden Kräfte im Gleichgewicht.

II) Ein Stab, der nur in seinen Endpunkten von Kräften angegriffen wird, kann nur im Gleichgewicht sein, wenn die Resultante der Kräfte des einen Endpunktes derjenigen des anderen Endpunktes gleich und entgegengesetzt ist, also beide Resultanten die Stabachse zur Wirkungslinie haben. Suchen diese den Stab zu $\left\{\begin{matrix}\text{verkürzen,}\\ \text{verlängern,}\end{matrix}\right\}$ so erleidet er $\left\{\begin{matrix}\text{Druck-}\\ \text{Zug-}\end{matrix}\right\}$ Spannung $\left(\begin{matrix}\text{Fig. 1a}\\ \text{Fig. 1b}\end{matrix}\right)$.

Fig. 1a.

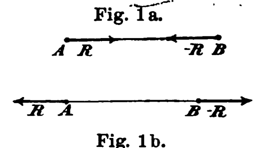


Fig. 1b.

III) Jeder Stab wirkt in einem seiner Endpunkte auf den benachbarten Konstruktionsteil (Stab, Stabverbindung, Bolzen) mit einer Kraft, die nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung gleich und entgegengesetzt ist derjenigen, welche er selbst von jenem Konstruktionsteil in diesem Knotenpunkt erfährt.

Es sei ABC ein zu einem starren Dreieck verbundenes Stabsystem (Fig. 2a), das von den im Gleichgewicht befindlichen äußeren Kräften P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 angegriffen sei. Man nehme den Stab BC weg und ersetze seine Wirkung auf die anstoßenden Stäbe durch die geeigneten in B und C angreifenden Kräfte

S′ und S″, so daß der Gleichgewichtszustand des Ganzen erhalten bleibt. Verteilt man nun die im Knotenpunkt A angreifende Kraft P_1 in 2 in unendlich kleiner Entfernung voneinander befindliche, parallele und gleichgerichtete Komponenten λP_1 und μP_1 (λ und $\mu < 1$; $\lambda + \mu = 1$), von denen λP_1 am Stab AB unendlich nahe an A, μP_1 am Stab AC unendlich nahe an A angreife, so wird, falls P_1 durch diese zwei Komponenten ersetzt wird, das Gleichgewicht des Ganzen nicht gestört. Man mache

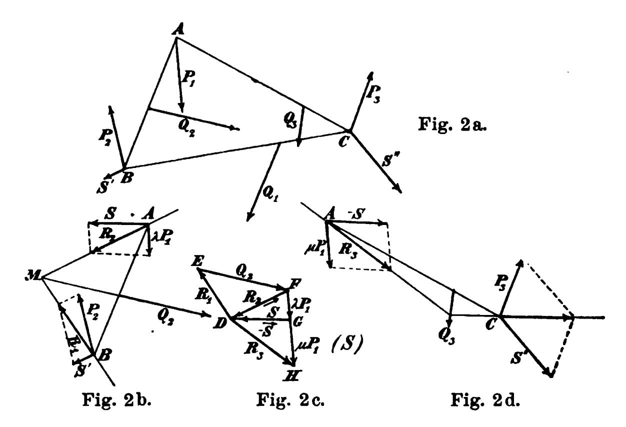


Fig. 2a.

Fig. 2b. Fig. 2c. Fig. 2d.

den Stab AB nun auch in A frei, indem man in A an ihm eine vom Stab AC herrührende Kraft S anbringt (Fig. 2b), so sind die fünf Kräfte dieses Stabes P_2, S′, Q_2, S und λP_1 im Gleichgewicht. Vereinigt man P_2 und S′ zur Resultanten R_1, ebenso λP_1 und S zur Resultanten R_2, so muß, da R_1, R_2 und Q_2 im Gleichgewicht sind, die Wirkungslinie von R_2 (vergl. Statik Bd. I, § 13) durch den Schnittpunkt M derjenigen von R_1 und Q_2 hindurchgehen (Fig. 2b) und die Kraft R_2

bildet mit R_1 und Q ein Kräftedreieck DEF (Fig. 2c). Bildet aber R_1 mit den übrigen Kräften des aus den Stäben BA und AC bestehenden Zuges BAC, bei unverteiltem P_1 Gleichgewicht, so bleibt dieses auch erhalten, wenn man P_1 durch ihre beiden Komponenten λP_1 und μP_1 ersetzt, d. h. R_1 ist unabhängig von der Art jener Verteilung bezw. von λ und μ. Daher ist auch R_2 als dritte Seite des Dreiecks DEF, das aus den Größen und Richtungen von R_1 und Q_2 bestimmt ist, unabhängig von λ und μ.

Zieht man (Fig. 2c) durch F die Strecke FG gleich, parallel und gleichgerichtet λP_1, so muß, da $-R_2$, λP_1 und S im Gleichgewicht sind und ein Kräftedreieck bilden müssen, die Strecke GD die Kraft S nach Größe, Richtung und Sinn darstellen.

Macht man auch Stab AC in A frei (Fig. 2d), so ist an ihm in A eine vom Stab AB herrührende Kraft anzubringen, die nach III) der Kraft S gleich und entgegengesetzt ist; außerdem wirkt an ihm in einem dem Punkt A unendlich nahen Punkt die Last μP_1. Man erhält die Resultante R_3 beider Kräfte, wenn man (Fig. 2c) den Pfeil von S umdreht, durch G die Strecke GH gleich, gleichgerichtet und parallel μP_1 legt; DH stellt diese Resultante R_3 nach Größe, Richtung und Sinn dar.

Da nun die ganze Strecke $FH = \lambda P_1 + \mu P_1 = P_1$, so ist Punkt H unabhängig von λ und μ und daher gilt dasselbe auch von R_3. Somit:

Die Resultanten R_2 und R_3 der im Endpunkt A beider Stäbe an ihnen angreifenden Kräfte sind unabhängig von der Art der Verteilung der Last P_1 auf beide Stäbe.

Ist A (Fig. 3) ein Knotenpunkt, in welchem drei Stäbe vereinigt sind, so hätte man für einen derselben, z. B. AB, an welchem unendlich nahe an A der Teil

λP_1 wirken möge, dieselben Erwägungen, falls unter S die Wirkung des starren Dreiecks ACD auf Stab AB verstanden würde, d. h. die Resultante R_2 von S und λP_1 ist unabhängig von λ und μ. Umgekehrt steht das starre Dreieck ACD in A unter Einwirkung der Kraft $-S$ und der Last μP_1. Nun läßt sich aber nach Obigem jede dieser Kräfte beliebig auf die zwei Stäbe AC und AD verteilen, somit läßt sich auch die Gesamtkraft P_1 als zu beliebigen Teilen an den drei Stäben in A angreifend betrachten.

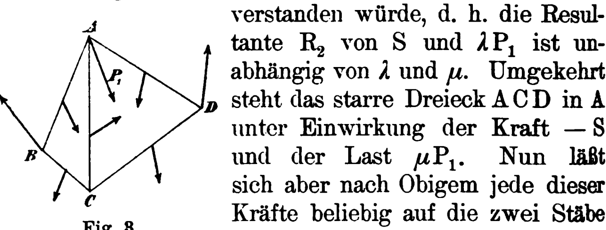


Fig. 8.

Die Fortsetzung der Betrachtung für Knotenpunkt mit vier Stäben u. s. f. ergibt allgemein:

IVa) Wirkt im Knotenpunkt einer ebenen starren Stabverbindung, in welchem beliebig viele Stäbe vereinigt sind, eine äußere Kraft P_1, so ist für jeden dieser Stäbe die Resultierende aller in jenem Knotenpunkt an ihm wirkenden Kräfte unabhängig von der Art der Verteilung jener Kraft auf die einzelnen in diesem Punkte verbundenen Stäbe.

Ist A der Knotenpunkt eines räumlichen starren Stabsystems, das von beliebigen Kräften und in A von der äußeren Kraft P_1 angegriffen sei, die mit den übrigen äußeren Kräften Gleichgewicht bilde, so projiziere man sämtliche Stäbe und Kräfte auf eine beliebige XY-Ebene. Die in den sechs Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte des Raumes (vergl. Statik Bd. I, § 29) enthaltenen drei Gleichungen

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0$$

$$M_z = \Sigma (Yx - Xy) = 0$$

(Momentengleichung der X und Y um den Ursprung)

drücken auch aus, daß das durch die Projektionen der Stäbe dargestellte ebene Stabsystem unter Einfluß der Projektionen der räumlichen Kräfte im Gleichgewicht ist. Daher ist die Art der Verteilung der Projektion p_1' von P_1 auf die in der Projektion a' des Knotenpunktes A verbundenen Stabprojektionen nach IVa) ohne Einfluß auf die Resultante der in a' an irgend einem der Stäbe des ebenen Systems angreifenden ebenen Kräfte oder die Komponente der Resultanten der sämtlichen in A an einem der räumlichen Stäbe angreifenden räumlichen Kräfte nach der XY-Ebene ist unabhängig von der Verteilung der p_1' auf die in a' zusammenstoßenden Stabprojektionen.

Analoges gilt aber auch, falls auf jede der beiden anderen Grundebenen eines räumlichen Koordinatensystems projiziert wird, daher:

IVb) Obiger Satz a) gilt auch für den Knotenpunkt einer räumlichen Stabverbindung.

Anmerkung. Diese vorstehenden Sätze behalten auch ihre Gültigkeit für nicht starre Stabverbindungen, nachdem diese durch Anbringung geeigneter äußerer passiver Kräfte (Widerstandskräfte) in solche umgewandelt sind, die sich als starre betrachten lassen.

§ 2. Methode der Berechnung.

Hinsichtlich der praktischen Durchführung der Rechnung ist zu beachten:

1. Man bestimme zuerst, indem man die Auflager wegnimmt und ihre Wirkung durch geeignete Kräfte, die Auflagerwiderstände, ersetzt, diese aus dem Gleichgewichtszustand des Ganzen und, wenn nötig, einzelner Teile.

2. Man mache der Reihe nach die einzelnen Stäbe in ihren Endpunkten unter Anbringung geeigneter, die

Wirkung der abgetrennten Konstruktionsteile ersetzender Kräfte frei und betrachte das Gleichgewicht des freigemachten Stabes. Oft ist es auch zweckmäßig, einen Knotenpunkt (Bolzen) freizumachen.

3. Bei Momentengleichungen wähle man die Kraft in absoluter Größe, das Vorzeichen des Momentes dem Drehsinn entsprechend (Uhrzeigersinn positiv) und bei vertikaler Belastung das Koordinatensystem mit horizontaler X-Achse. Der Momentenpunkt bezw. die Momentenachse ist stets so zu wählen, daß möglichst viel unbekannte Kräfte ein Moment $= 0$ liefern.

4. Die bei Freimachung eines Stabes bezw. Bolzens die abgetrennten Konstruktionsteile ersetzenden Kräfte werden gewöhnlich mittelst ihrer Horizontal- und Vertikalkomponente (H und V) angebracht; den Sinn ihrer Wirkung nimmt man auf Grund „statischen Empfindens“. Erweist sich im Laufe der Rechnung der Wert einer solchen Komponente als negativ, so ist die tatsächliche Komponente der gefundenen gleich und entgegengesetzt. Man setze die Rechnung mit der umgedrehten Komponente fort.

5. Gewöhnlich erweist sich der letzte Stab (oder Bolzen) als unter Wirkung lauter bereits gefundener und gegebener Kräfte stehend. Die aus seinem Gleichgewicht sich ergebenden Gleichungen ergeben dann Identitäten, die zur Probe der Rechnung dienen.

§ 3. Beispiele ebener Stabverbindungen.

Beispiel 1.

Es sollen die an den einzelnen Stäben des in Fig. 4a dargestellten, unten in einem *Spurzapfenlager*, oben in einem Halslager befestig-

ten, in C mit 600 kg belasteten Krans angegeben werden.

Auflösung:

A) Graphisch.

(Fig. 4a, b, c, d, e.)

a) Die Stabverbindung als Ganzes: (Fig. 4a).

Die Auflager seien ihrer Wirkung nach durch die Kräfte W und H_0 (horizontal) ersetzt. Die am freigemachten Stabsystem des Ganzen angreifenden Kräfte W, H_0 und P = 600 kg sind im Gleichgewicht. Ihre Wirkungslinien schneiden sich daher (vergl. Statik Bd. I, § 13) in einem Punkte S, der als Schnitt der gegebenen Wirkungslinien von H_0 und P bekannt ist. Die Verbindungslinie von S mit E gibt die Wirkungslinie von W. Ein über MN = und parallel P nach den Richtungen von H_0 und W konstruiertes Kräftedreieck MNO (Statik Bd. I, § 13, Beispiel 1) ergibt in den Seiten NO und OM Größe und Sinn von W und H_0 (Fig. 4a).

Fig. 4a.

Fig. 4b.

Fig. 4c.

Fig. 4d.

Fig. 4e.

b) Freimachung des Stabes AC: (Fig. 4b und c).

Stab BG übt (§ 1, II und III) in B auf AC eine Kraft D aus, deren Wirkungslinie in die Stabrichtung BG fällt. Entfernt man in B den Stab BG und in A den Stab EF, so bilden die dafür am Stab AC angebrachten Kräfte W_1 und D mit P Gleichgewicht. Ihre drei Wirkungslinien schneiden sich daher in einem Punkte T, der sich als Schnitt der verlängerten BG mit der Wirkungslinie von P bestimmt. TA gibt die Wirkungslinie von W_1. Ein über P nach den Richtungen von W_1 und D konstruie[rtes]

Kräftedreieck $A_0 A_1 A_2$ liefert W_1 und D nach Größe, Richtung und Sinn.

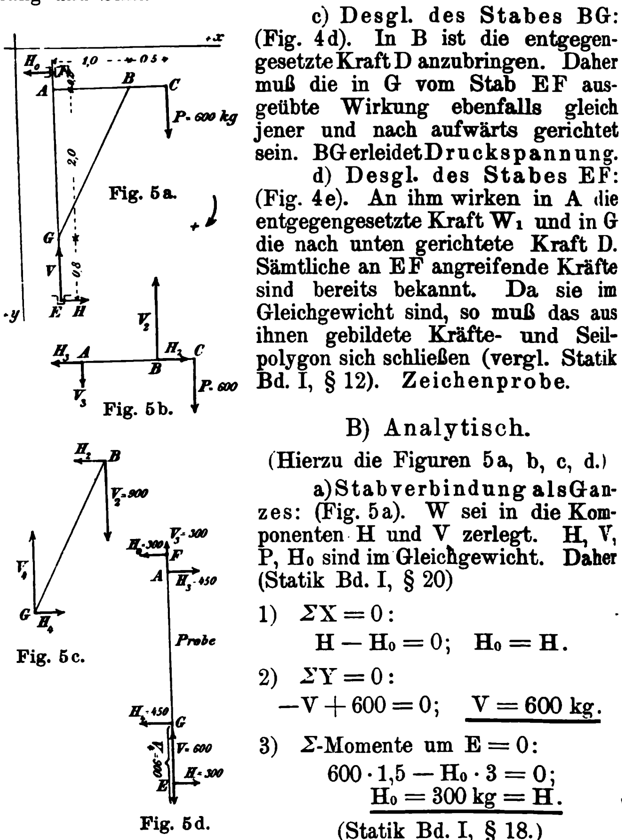


Fig. 5a.

Fig. 5b.

Fig. 5c.

Fig. 5d.

c) Desgl. des Stabes BG: (Fig. 4d). In B ist die entgegengesetzte Kraft D anzubringen. Daher muß die in G vom Stab EF ausgeübte Wirkung ebenfalls gleich jener und nach aufwärts gerichtet sein. BG erleidet Druckspannung.

d) Desgl. des Stabes EF: (Fig. 4e). An ihm wirken in A die entgegengesetzte Kraft W_1 und in G die nach unten gerichtete Kraft D. Sämtliche an EF angreifende Kräfte sind bereits bekannt. Da sie im Gleichgewicht sind, so muß das aus ihnen gebildete Kräfte- und Seilpolygon sich schließen (vergl. Statik Bd. I, § 12). Zeichenprobe.

B) Analytisch.

(Hierzu die Figuren 5a, b, c, d.)

a) Stabverbindung als Ganzes: (Fig. 5a). W sei in die Komponenten H und V zerlegt. H, V, P, H_0 sind im Gleichgewicht. Daher (Statik Bd. I, § 20)

1) $\Sigma X = 0$:

$$H - H_0 = 0; \quad H_0 = H.$$

2) $\Sigma Y = 0$:

$$-V + 600 = 0; \quad \underline{V = 600 \text{ kg}}.$$

3) Σ-Momente um E = 0:

$$600 \cdot 1{,}5 - H_0 \cdot 3 = 0;$$
$$\underline{H_0 = 300 \text{ kg} = H}.$$

(Statik Bd. I, § 18.)

b) Freimachung von AC: (Fig. 5b). In B seien die *Komponenten* V_2 und H_2 der Wirkung D des Stabes GB, in

A H_3 und V_3 derjenigen von EF auf AC angebracht. Gleichgewicht, daher:

1) $\Sigma X = 0: \quad H_2 - H_3 = 0; \quad H_2 = H_3.$

2) $\Sigma Y = 0: \; - V_2 + V_3 + 600 = 0.$

3) Σ-Momente um $B = 0: 600 \cdot 0{,}5 - V_3 \cdot 1 = 0;\; \underline{V_3 = 300 \text{ kg}}$

und vermöge 2) $\underline{V_2 = 900 \text{ kg}}$.

H_2 und H_3 bleiben zunächst unbestimmt.

c) Desgl. von BG: (Fig. 5c). In B sind die entgegengesetzten Kräfte H_2 und V_2, in G die Komponenten H_4 und V_4 der Einwirkung des Stabes EF anzubringen. Gleichgewicht, daher:

1) $\Sigma X = 0: \quad H_4 - H_2 = 0; \quad H_2 = H_4.$

2) $\Sigma Y = 0: \; -V_4 + V_2 = 0; \quad \underline{V_4} = V_2 = \underline{900 \text{ kg}}.$

3) Σ-Momente um $G = 0$:

$900 \cdot 1 - H_2 \cdot 2 = 0; \quad \underline{H_2 = 450 \text{ kg} = H_4 = H_3}.$

d) Desgl. von EF (Probe): (Fig. 5d). In A sind die entgegengesetzten Kräfte H_3 und V_3, in G die entgegengesetzten Kräfte H_4 und V_4 angebracht. Gleichgewicht, daher ergeben sich, da sämtliche Kräfte bereits bekannt sind, als Probe die folgenden Identitäten:

1) $\Sigma X = 0$:

$H_3 + H - H_0 - H_4 = 0; \quad 450 + 300 - 300 - 450 \equiv 0.$

2) $\Sigma Y = 0: \; -V + V_4 - V_3 = 0; \quad -600 + 900 - 300 \equiv 0.$

3) Σ-Momente um $G = 0$:

$H_3 \cdot 2 - H \cdot 0{,}8 - H_0 \cdot 2{,}2 = 0; \quad 450 \cdot 2 - 300 \cdot 0{,}8 - 300 \cdot 2{,}2 \equiv 0.$

Beispiel 2.

Berechnung der in Figur 6a angegebene Verbindung A_1BCA_2, die in A_1 auf dem reibungs-los gedachten Auflager frei gelagert sei.

(Fig. 6a, b, c, d, e, f und 7.)

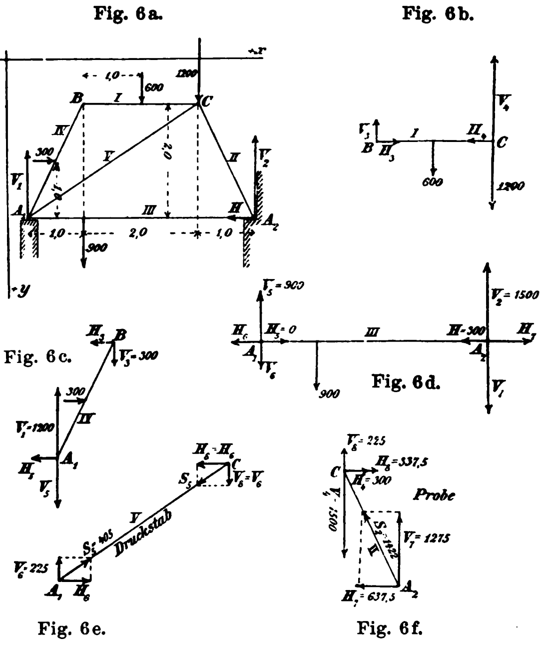


Fig. 6a. Fig. 6b. Fig. 6c. Fig. 6d. Fig. 6e. Fig. 6f.

Auflösung:

a) Stabverbindung als Ganzes: (Fig. 6a). In A ist die Wirkung des absolut glatten Auflagers nur durch ein Vertikalkraft V_1 zu ersetzen. Die Aufhebung der durch di *horizontale an* Stab IV angreifende Kraft (300 kg) erzeugte

Tendenz einer wagrechten Verschiebung kann also nur durch eine horizontale Widerstandskraft H des zweiten Auflagers bewirkt werden, so daß in A_2 die beiden Kräfte H und V_2 die Wirkung des Auflagers ersetzen. Gleichgewicht, daher (Statik Bd. I, § 20):

1) $\Sigma X = 0$: $300 - H = 0$; $\underline{H = 300 \text{ kg}}$.

2) $\Sigma Y = 0$: $-V_1 - V_2 + 600 + 1200 + 900 = 0$.

3) Σ-Momente um $A_2 = 0$:

$V_1 \cdot 4 + 300 \cdot 1 - 900 \cdot 3 - 600 \cdot 2 - 1200 \cdot 1 = 0$; $\underline{V_1 = 1200 \text{ kg}}$

und vermöge 2) $V_2 = \underline{1500 \text{ kg}}$.

b) Freimachung des Stabes I: (Fig. 6b). Angebracht sind in B an Stelle von A_1B die Kräfte H_3 und V_3; gemäß Satz IVa des § 1 sei in C die volle Last 1200 kg als an Stab I wirkend angenommen. Die resultierende Einwirkung der Stäbe II und V sei durch die in C an I angebrachten Kräfte V_4 und H_4 ausgedrückt. Gleichgewicht, daher:

1) $\Sigma X = 0$: $H_3 - H_4 = 0$; $H_3 = H_4$.

2) $\Sigma Y = 0$: $600 + 1200 - V_3 - V_4 = 0$.

3) Σ-Momente um $C = 0$:

$V_3 \cdot 2 - 600 \cdot 1 = 0$; $\underline{V_3 = 300 \text{ kg}}$

und vermöge 2) $\underline{V_4 = 1500 \text{ kg}}$.

H_3 und H_4 bleiben zunächst unbestimmt.

c) Desgl. des Stabes IV: (Fig. 6c). In B sind anzubringen die entgegengesetzten Kräfte H_3 und V_3. In A_1 sei gemäß Satz IVa des § 1 der ganze Auflagerdruck V_1 dem Stab IV zugeteilt. Die resultierende Einwirkung der Stäbe V und III, d. h. des starren Dreiecks A_1CA_2 sei H_5 und V_5. Gleichgewicht, daher:

1) $\Sigma X = 0$: $-H_5 + 300 - H_3 = 0$.

2) $\Sigma Y = 0$: $300 + V_5 - 1200 = 0$; $\underline{V_5 = 900 \text{ kg}}$.

3) Σ-Momente um $A_1 = 0$:

$300 \cdot 1 + 300 \cdot 1 - H_3 \cdot 2 = 0$; $\underline{H_3 = 300 \text{ kg} = H_4}$ (vermöge b, 1)

und somit vermöge 1) $\underline{H_5 = 0}$.

d) Desgl. des Stabes III: (Fig. 6d). In A_1 wirken am starren Dreieck CA_1A_2 die entgegengesetzten Kräfte H_5 und V_5 (Satz III, § 1). Dieselben seien (Satz IVa, § 1) ganz dem Stab III zugeteilt. Statt des wegzunehmenden Stabes V greifen in A_1 die Kräfte H_6 und V_6 an, statt des Stabes II H_7 und V_7. Die Auflagerdrücke H und V_2 seien (Satz IVa, § 1) ganz am Stab III angreifend gedacht. Gleichgewicht, daher:

1) $\Sigma X = 0$: $H_7 - 300 + 0 - H_6 = 0$.

2) $\Sigma Y = 0$: $900 + V_6 + V_7 - 900 - 1500 = 0$.

3) Σ-Momente um $A_1 = 0$:

$900 \cdot 1 - 1500 \cdot 4 + V_7 \cdot 4 = 0$; $\underline{V_7 = 1275 \text{ kg}}$

und vermöge 2) $\underline{V_6 = 225 \text{ kg}}$.

H_7 und H_6 bleiben zunächst unbestimmt.

e) Desgl. des Stabes V: (Fig. 6e). In A_1 sind die entgegengesetzten Kräfte H_6 und V_6 anzubringen (Satz III, § 1). Nach Satz II, § 1 erleidet Stab V nur Zug oder Druck, daher steht er in C unter Wirkung von Kräften H_8 und V_8, die den soeben angebrachten gleich und entgegengesetzt sind. Gleichgewicht, daher:

Σ-Momente um $C = 0$: $225 \cdot 3 - H_6 \cdot 2 = 0$; $\underline{H_6 = 337{,}5 \text{ kg}}$

und vermöge d, 1): $\underline{H_7 = 637{,}5 \text{ kg}}$.

Druckkraft S_5 in der Achse des Stabes V

$$S_5 = \sqrt{V_6^2 + H_6^2} = 405 \text{ kg}.$$

f) Desgl. des Stabes II (Probe): (Fig. 6f). In A_1 greifen (nach Satz III, § 1) an ihm die entgegengesetzten Kräfte H_7 und V_7 an, am starren Dreieck CA_1A_2 in C (vergl. b) die entgegengesetzten Kräfte H_4 und V_4 (Satz III, § 1), welche dem Stab II ganz zugeteilt seien (Satz IVa, § 1); Stab V ist in C durch die umgekehrten Kräfte H_8 und V_8 zu ersetzen ($H_8 = H_6$, $V_8 = V_6$). Gleichgewicht, daher ergeben sich als Probe die folgenden Identitäten, da sämtliche Kräfte nunmehr bekannt sind:

1) $\Sigma X = 0$: $H_8 + H_4 - H_7 = 0$; $337{,}5 + 300 - 637{,}5 \equiv 0$.

2) $\Sigma Y = 0$: $V_4 - V_8 - V_7 = 0$; $1500 - 225 - 1275 \equiv 0$.

3) Σ-Momente um $A_2 = 0$:

$$H_8 \cdot 2 + H_4 \cdot 2 + V_8 \cdot 1 - V_4 \cdot 1 = 0;$$

$$337{,}5 \cdot 2 + 300 \cdot 2 + 225 \cdot 1 - 1500 \cdot 1 \equiv 0.$$

Druckkraft S_2 in der Achse des Stabes II:

$$S_2 = \sqrt{V_7^2 + H_7^2} = 1422 \text{ kg}.$$

Resultate:

Man setze bei jedem Stab die in demselben Knotenpunkt angreifenden H, sowie die in demselben Knotenpunkt angreifenden V je zu einer Resultanten (R = algebr. Summe) zusammen, so erhält man die in Figur 7 dargestellten Resultate.

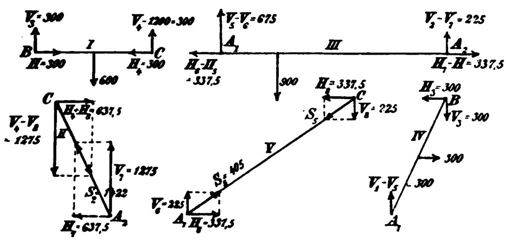


Fig. 7.

§ 4. Beispiel einer räumlichen Stabverbindung.

Die in Fig. 8a und b dargestellte, aus sechs Stäben bestehende räumliche Stabverbindung $A_1 A_2 D C$, die in D eine Knotenpunktsbelastung von $P = 600$ kg trägt, zu berechnen. Dieselbe sei in den Knotenpunkten A_1 und A_2 abgestützt und im Knotenpunkt C verankert (Fig. 8a bis l).

Auflösung: $A_2 A_1$ sei $+$Y-Achse, die durch A_2 senkrecht zu $A_1 A_2$ gezogene Horizontale $+$X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 8a). Di[illegible] *Auflagerwiderstände* in A_1 bezw. A_2 seien durch [illegible] *Achsenkomponenten* X_1, Y_1, Z_1 bezw. X_2, Y_2, Z_2 er[illegible]

ebenso die Widerstandskraft der Mauer in C durch ihre Komponenten H, Y_0 und Z_0. Dann bilden diese neun Kräfte Gleichgewicht mit $P = 600$ kg.

Zu ihrer Bestimmung (vergl. Statik Bd. I, § 48) sind nur die sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes (vergl. Statik Bd. I, § 29) vorhanden, daher ist die Ermittlung dieser neun Komponenten nur auf Grund von Annahmen möglich.

Wir denken uns zu diesem Zwecke die Befestigung in C derart, daß sie nur die Kraft H auszuüben vermöge, so daß also $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$. Dann liefert (Statik Bd. I, § 29):

a) Die Stabverbindung als Ganzes (Fig. 8a):

1) $\Sigma X = 0: \ -H + X_1 + X_2 = 0.$

2) $\Sigma Y = 0: \ Y_1 + Y_2 = 0.$

3) $\Sigma Z = 0: \ Z_1 + Z_2 - 600 = 0.$

Vergl. Statik Bd. I, § 28, Spez. Fälle.

4) $M_x = 0: \ Z_1 \cdot 2 - 600 \cdot 1 = 0; \quad \underline{Z_1 = 300 \text{ kg}}$
(Σ-Momente um X-Achse)
und vermöge 3) $\underline{Z_2 = 300 \text{ kg}}$.

5) $M_y = 0: \ 600 \cdot 3 - H \cdot 3 = 0; \quad \underline{H = 600 \text{ kg}}.$
(Σ-Momente um Y-Achse)

6) $M_z = 0: \ H \cdot 1 - X_1 \cdot 2 = 0; \quad \underline{X_1 = \frac{H}{2} = 300 \text{ kg}}$
(Σ-Momente um Z-Achse)
und vermöge 1) $\underline{X_2 = 300 \text{ kg}}$.

Y_1 und Y_2 bleiben unbestimmt. Da jedoch keine Tendenz zur Verschiebung des Ganzen in der Richtung der Y-Achse vorhanden ist, so treffen wir die weitere Annahme

$$\underline{Y_1 = Y_2 = 0.}$$

b) Freimachung des starren Dreiecks A_1CA_2 *(Fig. 8c). Der Stab I* ist durch eine Kraft mit der *Wirkungslinie in der Stabrichtung* zu ersetzen. Ihre Komponente

nach der X-Achse bezw. Z-Achse seien H_1 bezw. V_1 (Komponente nach der Y-Achse = 0). In A_1 und A_2 sind die Auflagerwiderstände und die Wirkungen der zu entfernenden Stäbe II und III anzubringen. Gleichgewicht; daher Momentengleichung um $A_1 A_2$:

Fig. 8a.

$$M_y = 0:$$

$$H_1 \cdot 3 - 600 \cdot 3 = 0; \quad \underline{H_1 = 600 \text{ kg.}}$$

c) Desgl. des Stabes I: (Fig. 8d). In C sind die entgegengesetzten Kräfte H_1 und V_1 anzubringen, in D eine Anzahl weiterer Kräfte. Wählt man die durch D zur Y-Achse gezogene Parallele als Momentenachse, so liefern die letzteren je ein Moment = 0. Daher bei Gleichgewicht die Momentengleichung um jene Achse:

$$M = 600 \cdot 1 - V_1 \cdot 3 = 0;$$

$$V_1 = \underline{200 \text{ kg.}}$$

d) Desgl. des Stabes II: (Fig. 8e). In D sind anzubringen statt des Stabes I die in gleichem Sinne wie vorher wirkenden Kräfte H_1 und V_1, statt des Stabes III die den Achsen parallelen H_3, Y_3, V_3, außerdem sei die Last 600 ganz dem Stab II zugeteilt. Ferner sind in A_1 eine Reihe Kräfte anzubringen, deren Moment jedoch = 0 wird, wenn die Y-Achse als Momentenachse gewählt wird. Daher bei Gleichgewicht in Beziehung auf diese:

Fig. 8b.

$$M_y = 600 \cdot 3 + 200 \cdot 3 - V_3 \cdot 3 + H_3 \cdot 4 - 600 \cdot 4 = 0$$

oder

$$-3V_3 + 4H_3 = 0.$$

e) Desgl. des Knotenpunktes (Bolzens) D: (Fig. 8 ... An ihm greifen außer der Last 600, an Stelle von I di...

Sinne von vorhin wirkenden H_1 und V_1, an Stelle von III die wie vorhin gerichteten Kräfte H_3, Y_3 und V_3 und statt des Stabes II die noch unbekannten Kräfte H_2, Y'_2 und V_2 an. Sein Gleichgewicht liefert

1) $$\Sigma X = 0: \quad -600 + H_3 + H_2 = 0$$

und da wegen der Symmetrie $H_3 = H_2$ genommen werden kann

$$\underline{H_3 = H_2 = 300 \text{ kg}}$$

und somit aus d) $\underline{V_3 = 400 \text{ kg.}}$

2) $\Sigma Z = 0: \; V_2 + 400 - 200 - 600 = 0; \quad \underline{V_2 = 400 \text{ kg.}}$

3) $\Sigma Y = 0: \; Y_3 - Y'_2 = 0.$

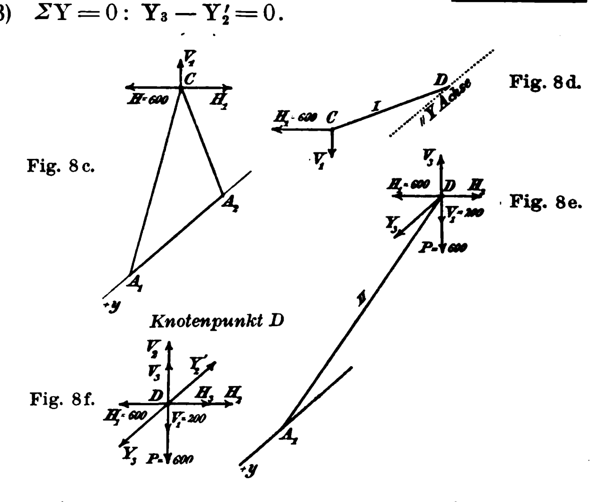


Fig. 8c. Fig. 8d. Fig. 8e. Fig. 8f.

f) Desgl. des Stabes III: (Fig. 8g). In D seien (§ 1, III) die entgegengesetzten Kräfte H_3, Y_3, V_3 angebracht (vergl. d). Nimmt man die X-Achse als Momentenachse, so liefern die in A_2 anzubringenden Kräfte ein Moment je $= 0$, daher folgt aus dem Gleichgewicht des Stabes III

$$M_X = Y_3 \cdot 4 - 400 \cdot 1 = 0; \quad \underline{Y_3 = 100 \text{ kg}}$$

und vermöge 3) in e) $\underline{Y'_2 = 100 \text{ kg.}}$

g) Desgl. des Stabes V: (Fig. 8h). In C sind an Stelle von I die Kräfte H_1 und V_1, anstatt VI die Kräfte Y_6 und V_6 angebracht ($H_6 = 0$); ferner sei H ebenfalls diesem Stab zugeteilt. Nimmt man die durch A_1 zur X-Achse gezogene Parallele als Momentenachse, so liefern die in A_1 anzubringenden Kräfte ein Moment je $= 0$, somit bei Gleichgewicht Momentengleichung um diese Achse:

$$M = -200 \cdot 1 + Y_6 \cdot 3 + V_6 \cdot 1 = 0; \quad 3 Y_6 + V_6 = 200.$$

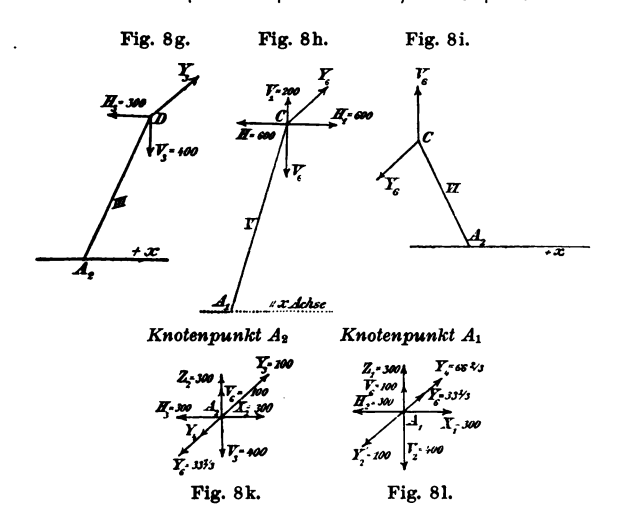


Fig. 8g. Fig. 8h. Fig. 8i.

Fig. 8k. Fig. 8l.

h) Desgl. des Stabes VI: (Fig. 8i). In C sind (§ 1, III) die entgegengesetzten Kräfte Y_6 und V_6 anzubringen. Nimmt man die X-Achse als Momentenachse, so liefern die in A_2 angreifenden Kräfte je ein Moment $= 0$, daher bei Gleichgewicht

$$M = V_6 \cdot 1 - Y_6 \cdot 3 = 0.$$

Diese und die vorhergehende Gleichung liefern $V_6 = 100$ kg, $Y_6 = 33^1/_3$ kg.

ab No.	H_r	Y_r	V_r	$S = \sqrt{H_r^2 + Y_r^2 + V_r^2}$
I	600	0	200	632 (Zug)
II	300	100	400	510 (Druck)
III	300	100	400	510 (Druck)
IV	0	$66^2/_3$	0	$66^2/_3$ (Zug)
V	0	$33^1/_3$	100	105 (Zug)
VI	0	$33^1/_3$	1[illegible]	[illegible]05 (Zug)

[illegible] stem
von [illegible] den
[illegible] Stäbe
[illegible] An-
[illegible] Stäbe
[illegible] Lage

Um diese Beanspruchung zu ermöglichen, dürfen die am Fachwerk wirkenden äußeren (aktiven und passiven) Kräfte ebenfalls nur in dessen Knotenpunkten angreifen (Belastungen, Auflagerwiderstände). Vergl. § 1, II.

Über die Knotenpunkte gelte die Voraussetzung des § 1.

Zur gegenseitigen Festlegung dreier Knotenpunkte bedarf es dreier Stäbe von unveränderlicher Länge, zur Festlegung eines vierten Knotenpunktes derselben Ebene gegenüber dem erhaltenen starren Dreieck zweier weiterer Stäbe. In gleicher Weise erfordert jeder weitere Knotenpunkt derselben Ebene zu seiner Festlegung gegenüber der bereits vorhandenen starren Stabverbindung je zwei weitere Stäbe, so daß also zur gegenseitigen Festlegung von n Knotenpunkten eines ebenen Fachwerkes erforderlich sind:

$$3 + (n - 3)2 = 2n - 3 \text{ Stäbe.}$$

Ist eine ebene Stabverbindung von geringerer Anzahl von Stäben als der angegebenen im Gleichgewicht, so kann dieses nur labil sein (Fig. 9), da eine Verschiebung der Knotenpunkte gegeneinander zu einer dauernden Störung der ursprünglichen Gleichgewichtsform führt.

Fig. 9.

Ist das aus $2n - 3$ Stäben bestehende ebene Fachwerk in zweien seiner Knotenpunkte festgehalten und in beliebigen Knotenpunkten von gegebenen äußeren Kräften derselben Ebene von beliebiger Größe und Richtung angegriffen, so bilden diese mit den Widerstandskräften der festgehaltenen Punkte Gleichgewicht. Die zur Verfügung stehenden drei Gleichgewichtsbedingungen von Kräften der Ebene gestatten die Bestimmung dreier auf diese Widerstandskräfte bezüglichen Unbekannten, und falls diese die Unbekannten nicht in höherer Anzahl

enthalten, ist das ebene Fachwerk damit statisch bestimmt, d. h. die Stabkräfte lassen sich ebenfalls ermitteln.

Enthält ein ebenes Fachwerk von n Knotenpunkten mehr als 2n — 3 Stäbe, so läßt es sich häufig in mehrere (einfache) statisch bestimmte Fachwerke zerlegen; andernfalls ist seine Berechnung nur mit Hilfe der Elastizitätslehre möglich.

Die Fachwerke zerfallen in Balken-(Träger-)fachwerke und Bogenfachwerke. Erstere ersetzen einen freiaufliegenden tragenden Balken und üben demnach auf die Auflager bei vertikaler Belastung nur vertikale Drücke aus, letztere außerdem noch horizontale Drücke (Schübe). Zu den ersteren rechnet man die freiaufliegenden Dach- und Brückenträger.

Im folgenden seien nur statisch bestimmte Fachwerke behandelt.

§ 6. Graphische Berechnung ebener Fachwerke, deren Ebene zugleich Kraftebene ist.

Gegenstand der Berechnung ist die Ermittlung der in den Stäben wirkenden Zug- oder Druckkräfte.

A) Knotenpunktsmethode (nach Cremona).

Das durch die Knotenpunkte I bis VI in Fig. 10a dargestellte, in den Auflagerpunkten I und VI von den Auflagerwiderständen W_1 und W_2, in den übrigen Knotenpunkten und in I und VI von beliebigen aktiven Kräften P angegriffene Fachwerk sei im Gleichgewicht, dann ist jeder einzelne Knotenpunkt unter Einfluß der an ihm angreifenden P bezw W und der die Wirkung der anstoßenden Stäbe ersetzenden Stabkräfte im Gleichgewicht. Für jeden Knotenpunkt bilden daher diese Kräfte (vergl.

Statik Bd. I, § 8) ein sich schließendes Kräftepolygon, das (vergl. Statik Bd. I, § 8, Beispiel 2) die Bestimmung zweier dieser Stabkräfte von gegebener Richtung gestattet.

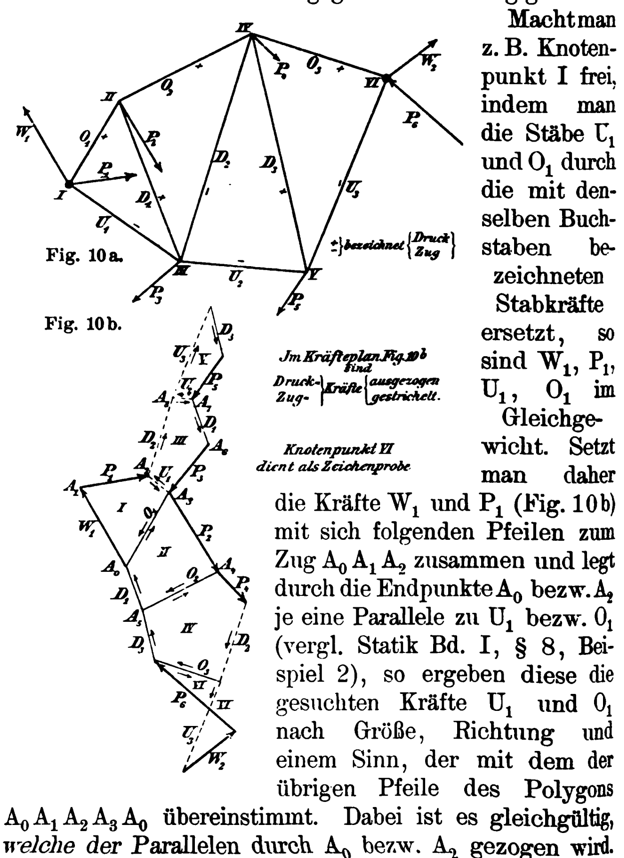


Fig. 10a.

Fig. 10b.

Macht man z. B. Knotenpunkt I frei, indem man die Stäbe U_1 und O_1 durch die mit denselben Buchstaben bezeichneten Stabkräfte ersetzt, so sind W_1, P_1, U_1, O_1 im Gleichgewicht. Setzt man daher die Kräfte W_1 und P_1 (Fig. 10b) mit sich folgenden Pfeilen zum Zug $A_0\,A_1\,A_2$ zusammen und legt durch die Endpunkte A_0 bezw. A_2 je eine Parallele zu U_1 bezw. O_1 (vergl. Statik Bd. I, § 8, Beispiel 2), so ergeben diese die gesuchten Kräfte U_1 und O_1 nach Größe, Richtung und einem Sinn, der mit dem der übrigen Pfeile des Polygons $A_0\,A_1\,A_2\,A_3\,A_0$ übereinstimmt. Dabei ist es gleichgültig, *welche der* Parallelen durch A_0 bezw. A_2 gezogen wird.

Die sich ergebende Kraft O_1 drückt auf den Knotenpunkt I (Bolzen); also erhält nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung der Stab O_1 vom Knotenpunkt die gleiche, aber entgegengesetzte Kraft, d. h. O_1 ist für Stab O_1 Druckkraft (Druckspannung) (vergl. Fig. 1a). U_1 wirkt vom Knotenpunkt weg; der Knotenpunkt wirkt auf den Stab U_1 in entgegengesetztem Sinne, d. h. U_1 ist für Stab U_1 Zugkraft (Zugspannung).

Man mache Knotenpunkt II frei. Aus dem Gleichgewicht des Stabes O_1 folgt die Gleichheit und der entgegengesetzte Sinn der Wirkungen der Knotenpunkte I und II auf ihn. Die Wirkung des Stabes O_1 auf II ist also gleich und entgegengesetzt derjenigen, die er auf I ausübt. Bringt man diese umgekehrte Kraft O_1 an II an, und ebenso an Stelle von D_1 und O_2 die entsprechenden Stabkräfte D_1 und O_2, so sind die umgekehrte Kraft O_1, D_1 und O_2 mit P_2 im Gleichgewicht, d. h. das aus ihnen gebildete Kräftepolygon muß sich schließen. Dreht man also den Pfeil von $A_3 A_0$ um und fügt in A_3 die Kraft P_2 nach Größe und Richtung an, so daß die Pfeile sich folgen, so bestimmen die Parallelen durch A_0 und A_4 zu D_1 und O_2 die gesuchten Kräfte D_1 und O_2 nach Größe, Richtung und Sinn, wenn ihre Pfeile ebenfalls im Sinne $A_0 A_3 A_4 A_5 A_0$ genommen werden.

O_2 ergibt sich für Stab O_2 als Druckkraft, D_1 für Stab D_1 ebenfalls als Druckkraft.

Analog ist für Knotenpunkt III Gleichgewicht, wenn außer P_3 an III die Stabkräfte U_2 und D_2, sowie Kräfte D_1 und U_1 angebracht werden, welche den bei den vorhergehenden Knotenpunkten gefundenen gleich und entgegengesetzt sind. Dreht man daher den Pfeil von U_1 um, fügt in A_3 die Kraft P_3 und in deren Endpunkt A_6

die bereits gefundene umgekehrte Kraft D_1 an, so daß deren Pfeile sich folgen, legt durch A_2 und A_7 Parallelen zu D_2 und U_2, so bilden diese die neuen Stabkräfte D_2 und U_2 u. s. f.

Fährt man in dieser Weise fort, indem man aus dem Gleichgewicht jedes Knotenpunktes der Reihe nach je zwei unbekannte Kräfte findet, so erhält man eine Reihe von Kräftepolygonen, deren letztes häufig, da es weniger als zwei Unbekannte enthält, als Probe dienen kann. Dabei können die Polygone als verschränkte Polygone auftreten, wie z. B. in Fig. 10b das Kontrollepolygon des Knotenpunktes VI.

Anmerkung 1. Die einzelnen Kräftepolygone lassen sich auch getrennt voneinander konstruieren. Stehen sie im Zusammenhang wie in Fig. 10b, so bilden sie einen Kräfteplan.

Anmerkung 2. Eine auf einen Knotenpunkt wirkende Stabkraft ist gleich und entgegengesetzt derjenigen, welche der Stab vom Knotenpunkt (Bolzen) empfängt. Daher bedeutet bei dieser Methode eine im Kräfteplan gegen $\left\{\begin{array}{l}\text{den Knotenpunkt hin}\\ \text{vom Knotenpunkt weg}\end{array}\right\}$ gerichtete Stabkraft $\left\{\begin{array}{l}\text{eine Druckkraft}\\ \text{eine Zugkraft}\end{array}\right\}$ im Stab.

In Fig. 10a und ff. sind die gedrückten Stäbe mit +, die gezogenen mit — bezeichnet und in Fig. 10b u. ff. die Druckkräfte ausgezogen, die Zugkräfte gestrichelt.

Anmerkung 3. Die Methode läßt sich auch auf räumliche Fachwerke übertragen (vergl. Statik Bd. I, § 24, Beispiel 1, Auflösung 2).

Beispiel.

Konstruktion des Kräfteplanes für das in *Fig. 11a* dargestellte Fachwerk, das im Knotenpunkt IV

600 kg vertikal belastet sei und in A_1 und A_2 frei liege.

Auflösung: Bestimme zuerst die vertikalen Auferdrücke $W_1 = W_2$ aus

$$\Sigma Y = 0: W_1 + W_2 - 600 = 0,$$
$$W_1 = W_2 = 300 \text{ kg},$$

hle einen Kräftemaßstab und beginne mit dem Kräfteygon $A_0 A_1 A_2$ des Knotenpunktes I, indem man $A_0 A_1$ g. 11 b) im Kräftemaßstab $= W_1$ cht, $A_0 A_2 \parallel O_1$ und $A_1 A_2 \parallel U_1$ zieht. raus bestimmen sich O_1 und U_1. s dem Knotenpunkt II bestimmen h mit Hilfe des gedrehten U_1 die ei unbekannten ifte $O_4 (= O_1)$ und $= 0$ ($A_1 A_3 = W_2$ l $A_3 A_2 \parallel O_4$). Aus n folgenden Knopunkt III sind D_2 l O_3 und aus IV O_2 timmt. Für Knopunkt V sind nun sämtliche Stabkräfte bestimmt, er dient das Schließen des aus ihnen konstruierten ygons als Zeichenprobe ($A_0 A_5$ muß parallel O_2 und ch O_2 oder O_3 sich ergeben).

Fig. 11 a.

Stabkraft $D_1 = 0$ Knotenpunkt V dient als Zeichenprobe.

Fig. 11 b.

B) Schnittmethode (nach Ritter).

(Am Beispiel erläutert.)

Am Fachwerksträger Fig. 12a (Kragdach) greifen den äußersten Knotenpunkten des oberen Gurtes je

die vertikale Last $\frac{P}{2}$, an den zwischenliegenden Knotenpunkten je die Last P an. Er sei in N an der vertikalen Wand horizontal so verankert, daß die Widerstandskraft der Mauer in N horizontal sei; im Knotenpunkt M sei der Träger gegen die Mauer abgestützt.

Führt man einen Schnitt I durch den Träger, der die Stäbe O_1 und U_1 durchschneidet, so bleibt der links abgeschnittene Trägerteil im Gleichgewicht, wenn man an ihm in den Schnittstellen die entsprechenden Stabkräfte anbringt. Es sind also die Kräfte $\frac{P}{2}$, U_1 und O_1 im Gleichgewicht und bilden daher ein Kräftedreieck. Ist $A_0 A_1$ (Fig. 12 b) gleich, parallel und gleichgerichtet der Kraft $\frac{P}{2}$, so bestimmen demnach die durch A_0 und A_1 zu U_1 bezw. O_1 gelegten Parallelen die Kräfte U_1 und O_1 nach Größe, Richtung und Sinn (Pfeile im Dreieck müssen sich folgen).

Fig. 12a.

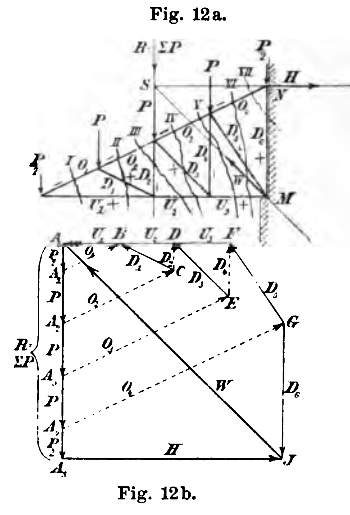


Fig. 12b.

Ein weiterer Schnitt II treffe außer U_1 noch die Stäbe D_1 und O_2, deren Kräfte noch unbekannt sind. Dann ist wieder nach Anbringen der Stabkräfte am *links* abgeschnittenen Trägerteil in den Schnittstellen

dieser im Gleichgewicht, d. h. $\frac{P}{2}$, P, U_1, D_1, O_2 sind im Gleichgewicht. Daher muß wieder das aus ihnen gebildete Kräftepolygon sich schließen. Fügt man daher in A_1 die Kraft P an bis A_2, so bilden U_1, $\frac{P}{2}$, P den Zug $BA_0A_1A_2$ (U_1 von gleichem Sinne wie vorher). Die Parallelen durch A_2 zu O_2 und durch B zu D_1 liefern die unbekannten Stabkräfte O_2 und D_1 (Pfeile folgen sich im Sinne $BA_0A_1A_2CB$).

Ein weiterer Schnitt III treffe außer dem Stab O_2 die zwei Stäbe mit den noch unbekannten Kräften D_2 und U_2. Die Kräfte O_2, U_2 und D_2 sind dann als am links abgeschnittenen Trägerteil wirkend wieder im Gleichgewicht mit den ebenfalls an diesem angreifenden $\frac{P}{2}$ und P. O_2 ist von gleichem Sinne wie vorher. Die Kräfte $\frac{P}{2}$, P und O_2 bilden den Zug $A_0A_1A_2C$, so daß die Parallelen durch C zu D_2 und durch A_0 zu U_2 die Kräfte D_2 und U_2 ($= DA_0$) bestimmen. Ein nächster Schnitt IV führt mittelst des Zuges $DA_0A_1A_2A_3$ in analoger Weise auf das Polygon $DA_0A_1A_2A_3E$ und damit auf die unbekannten Kräfte D_3 und O_3 u. s. f. Ein letzter Schnitt (VII) treffe O_4 und D_6. Die entsprechenden Stabkräfte O_4 und D_6 sind im Gleichgewicht mit $\frac{P}{2}$, P, P und P und dem ebenfalls am linksseitig abgeschnittenen Trägerteil in M angreifenden Auflagerdruck W.

Bestimmt man die Wirkungslinie von W in Rücksicht darauf, daß W mit den übrigen der am Träger (als Ganzes) angreifenden Kräfte, nämlich den Laste

$\frac{P}{2}$, P, P und P und dem in N angreifenden Horizontalzug H im Gleichgewicht ist, dadurch daß man (vergl. Statik Bd. I, § 13) den Schnittpunkt S der Resultanten der P und der Wirkungslinie von H mit M verbindet, so findet man W und D_6 aus dem Gleichgewicht des Schnittes VII, indem man durch A_0 die Parallele zur gefundenen Wirkungslinie von W und durch den Endpunkt G von O_4 die Parallele zu D_6 legt.

Die Stabkräfte sind nunmehr sämtlich bestimmt. Eine Zeichenprobe ergibt sich aus dem Gleichgewicht des Trägers als Ganzes: W, H und die Resultante R der P sind im Gleichgewicht und bilden demnach ein Kräftedreieck. Fügt man daher in A_4 noch $\frac{P}{2}$ an bis A_5, so daß $A_0 A_5 = R$ ist, so muß demnach die Verbindungslinie von A_5 mit dem Endpunkt J von W die Kraft H darstellen, also horizontal sein.

Anmerkung 1. Ein Umkehren des Pfeiles einer gefundenen Stabkraft beim Übergang von einem Schnitt zum nächstfolgenden ist bei dieser Methode nicht nötig.

Anmerkung 2. Ist eine gefundene Stabkraft ihrem Sinne nach

$\left\{\begin{matrix}\text{dem links abgeschnittenen Trägerteil entgegen}\\ \text{vom links abgeschnittenen Trägerteil weg}\end{matrix}\right\}$ gerichtet,

so ist sie für den betr. Stab $\left\{\begin{matrix}\text{Druck-}\\ \text{Zug-}\end{matrix}\right\}$ Kraft (Spannung).

Anmerkung 3. Die im Zusammenhang ausgeführte Konstruktion der Stabkräfte bildet einen Kräfteplan.

---

§ 7. Analytische Berechnung ebener Fachwerke nach der Schnittmethode (Momentenmethode nach Ritter).

Für jeden Schnitt ist unter Einfluß der am links abgeschnittenen Trägerteil angreifenden äußeren Kräfte P bezw. W und der Stabkräfte der durchschnittenen Stäbe dieser linksseitige Trägerteil im Gleichgewicht, daher ist nach Statik Bd. I, § 20 die algebraische Summe der statischen Momente der genannten Kräfte in Beziehung auf jeden beliebigen Punkt der Ebene gleich Null.

Man sucht nun die Schnitte so zu führen, daß sie möglichst nur drei Stäbe treffen. Um nun die Kraft in einem derselben zu bestimmen, wähle man den Schnittpunkt der beiden andern zum Momentenpunkt. Die Kräfte der beiden letzteren ergeben dann ein Moment je $= 0$ und die Momentengleichung enthält die gesuchte Kraft als einzige Unbekannte.

Um z. B. O_2 aus Schnitt II (Fig. 13) zu bestimmen, nehme man C als Momentenpunkt und die Momentengleichung (für die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte $\frac{P}{2}$, P, O_2, D_1, U_1):

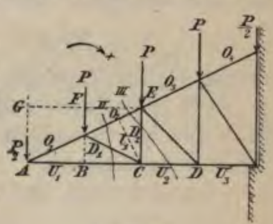


Fig. 13.

$$-\frac{P}{2} \cdot CA - P \cdot CB + O_2 \cdot l_1 = 0$$

liefert, da der Arm l_1 bekannt (am einfachsten mittelst Maßstabes aus der Figur zu entnehmen) die gesuchte Kraft O_2.

Zugleich erkennt man, daß die Gleichung nur befriedigt sein kann, wenn der Drehsinn des Momentes von O_2 demjenigen der P entgegengesetzt ist. O_2 wirkt

Daher:

Bei einem wie oben angeordneten Fachwerksträger (Balkenfachwerk) ruft jede vertikale Last in jedem Stab des $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Gurtes $\left\{\begin{matrix}\text{Druck-}\\ \text{Zug-}\end{matrix}\right\}$ Spannung hervor. Daraus folgt:

I. Das Maximum der $\left\{\begin{matrix}\text{Druck-}\\ \text{Zug-}\end{matrix}\right\}$ spannung für irgend einen Stab des $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Gurtes, dessen Momentenpunkt bei irgend einer Knotenpunktsbelastung stets innerhalb W_1 und W_2 liegt, tritt bei möglichster Vollbelastung des Trägers ein.

Anmerkung. Der Satz gilt auch für beliebige, nicht vertikale Belastung und nicht vertikale, jedoch nach oben gerichtete Auflagerdrücke.

c) Füllglieder (Diagonalen, Vertikalständer).

1. Fall. Der Momentenpunkt für ein Füllglied (§ 7) liege innerhalb der Wirkungslinien von W_1 und W_2 (Fig. 15). Am rechtsseitigen Teil des durch den Schnitt

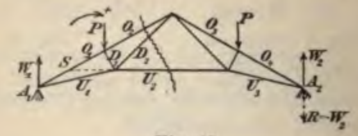


Fig. 15.

$O_2 D_2 U_2$ getrennten Trägers greife in einen beliebigen Knotenpunkt die Last P an, die wieder die beiden vertikal nach aufwärts gerichteten Auflagerdrücke W_1 und W_2 erzeugt. Der Momentenpunkt zur Bestimmung von D_2 ist nach § 7 der Punkt S. W_1 liefert ein

positives Moment, daher muß das Moment von D_2 negativ sein, also ist D_2 Zug.

Eine Belastung links vom Schnitt liefert mit W_1 die Resultante R, die wie oben bei a) $= -W_2$ sein muß und also um S ein positives Moment liefert. D_2 liefert demnach wieder ein negatives Moment, ist also wieder Zug.

Daher:

II. Für ein Füllglied eines wie oben angeordneten Balkenfachwerks, dessen Momentenpunkt bei irgend einer Knotenpunktsbelastung stets innerhalb W_1 und W_2 liegt, tritt das Maximum der Beanspruchung bei möglichster Vollbelastung des ganzen Trägers ein.

Anmerkung wie bei I.

2. Fall. Der Momentenpunkt S für ein Füllglied liege außerhalb der Wirkungslinien von W_1 und W_2 (Fig. 16).

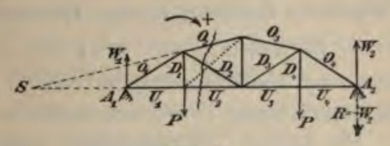


Fig. 16.

Eine vertikale Knotenpunktsbelastung P rechts vom Schnitt $O_2 D_2 U_2$ ruft für S als Momentenpunkt ein negatives Moment von W_1 und somit ein positives Moment der Kraft D_2 hervor. D_2 ist also Zug.

Eine Belastung links vom Schnitt gibt wieder mit W_1 die Resultante $R = -W_2$, die jedoch für S ein positives Moment liefert. Man erhält somit für D_2 ein

negatives Moment. Es wird also für diesen Belastungsfall D_2 Druck.

Hätte D_2 die Lage der andern Diagonale des durch O_2 und U_2 bestimmten Trägerfeldes (in Fig. 16 punktiert), so hätten sich die gefundenen Resultate umgekehrt.

Daher:

III. Für ein Füllglied eines wie oben angeordneten Balkenfachwerks, dessen Momentenpunkt bei irgend einer Knotenpunktsbelastung stets außerhalb W_1 und W_2 liegt, tritt das Maximum der $\left\{\begin{matrix}\text{Zug-}\\\text{Druck-}\end{matrix}\right\}$ spannung bei möglichster Vollbelastung desjenigen Trägerteiles ein, in welchem der $\left\{\begin{matrix}\text{untere}\\\text{obere}\end{matrix}\right\}$ Knotenpunkt des Füllglieds liegt.

Anmerkung wie bei I.

§ 9. Statische Berechnung der Dachträger.

I. Belastung der Träger.

Die Belastung eines Dachträgers besteht aus einer unveränderlich und stetig, außerdem aus einer zufällig wirkenden. Die erstere (Eigengewicht) setzt sich aus dem (Eisen-)Gewicht des Trägers und dem Gewichte der getragenen Konstruktion (Dachdeckung) zusammen; die zufällig wirkende ist das Gewicht einer auf der ganzen Dachfläche ruhenden Schneelast und der normal zur Dachfläche in den Knotenpunkten des oberen Gurtes angreifende einseitige Winddruck. Die zufällige Belastung heißt auch mobile Belastung.

Als Mittelwerte des gesamten Eigengewichtes (*Eiserner Träger* + Deckung) können gelten:

Deckung	kg/1 qm geneigter Dachfläche
Holzzement	220
Doppeltes oder Kronenziegeldach	120—150
Einfaches Ziegeldach	105—120
Schiefer samt Schalung	85—95
Glas in Winkeleisen	70
Wellblech	45

Mobile Belastung:

1. Schneelast für unsere Breiten im Maximum 70 kg/qm Horizontalprojektion (Grundrißfläche).

2. Winddruck:

Die Windgeschwindigkeit v Meter pro Sekunde bilde mit der Dachfläche (Fig. 17) den Winkel α. Zur Wirkung gelangt nur deren Normalkomponente $v \cdot \sin \alpha$ als Druck auf die Dachfläche. Nach der Erfahrung ist nun der Druck des Windes auf eine zur Windrichtung senkrechte Fläche F (qm) proportional dieser und dem Quadrat der Geschwindigkeit; demnach kommt auf F qm Dachfläche der Winddruck

Fig. 17.

$$N = \lambda \cdot F \cdot (v \sin \alpha)^2 \quad (\lambda \text{ Proportionalitätsfaktor})$$
$$= \lambda \cdot F \cdot \sin^2 \alpha \cdot v^2.$$

Nun bedeutet aber $\lambda \cdot 1 \cdot v^2$ nach Obigem den Winddruck auf die zur Geschwindigkeit v senkrechte Fläche von 1 qm. Bezeichnet man diesen Einheitsdruck mit w, so folgt

$$N = w \cdot F \cdot \sin^2 \alpha.$$

*Ein Maximal*wert für w ist für unsere Gegenden *nach der Erfahrung* bei stärkstem Sturme 250 kg; ei

Mittelwert 200 kg. Mit diesem Wert ergibt sich der Winddruck n auf 1 qm (F = 1) geneigter Druckfläche (normal zu dieser)

$$n = 200 \cdot \sin^2 \alpha \text{ kg.}$$

Die Windrichtung kann um ca. 10^0 gegen den Horizont geneigt angenommen werden, so daß bei der Horizontalneigung φ der Dachfläche

$$\alpha = \varphi^0 + 10^0,$$

also

$$n = 200 \cdot \sin^2(\varphi^0 + 10^0) \text{ kg.}$$

(**Winddruck auf 1 qm Dachfläche normal zu dieser gerichtet.**)

II. Gang der statischen Berechnung.

Ihr Zweck ist die Ermittlung der in jedem Stab auftretenden Maximalkräfte hinsichtlich Druckes und Zuges. Da die Beanspruchung jedes Stabes eine aus derjenigen des Eigengewichts und der mobilen Belastung zusammengesetzte sein kann, so ist es bei genauen Rechnungen nötig, die erstere (unveränderliche), sowie die größten Werte der letzteren zu kennen. Sämtliche Belastungen sind hierbei an den Knotenpunkten des oberen Gurtes angreifend zu nehmen. Dabei erkennt man, daß die Schneelast, die ebenfalls über den ganzen Träger sich verteilt wie das Eigengewicht, die einzelnen Stäbe in gleicher Weise beansprucht wie letzteres, daher zerfällt die Berechnung der Maximalstabkräfte in drei Teile:

A) Berechnung für Eigengewicht + Schneelast.

B) Berechnung für einseitigen Winddruck.

C) Kombination der hieraus ermittelten Werte zur tatsächlichen, im ungünstigsten Fall eintretenden Maximal*kraft für jeden* Stab, sowohl hinsichtlich Druckes als Zuges.

A) Berechnung bei Vollbelastung durch Eigengewicht + Schneelast.

(q kg pro qm geneigter Dachfläche
p kg pro qm Grundrißfläche)

Man bestimme zuerst die Belastung pro Knotenpunkt. Ist b met. (Binderweite) die horizontale Entfernung zweier Träger bezw. die horizontale senkrecht zur Trägerebene gemessene Breite des vom Träger zu tragenden Dachfeldes, s met. die schiefe Länge der Dachfläche (Sparrenlänge) und q die Belastung pro qm geneigter Dachfläche, so kommt auf einen Träger die Last $2(b \cdot s \cdot q)$ kg. Bei gleicher Entfernung der oberen Knotenpunkte verteilt sich diese Last auf diese in der Weise, daß die Auflagerpunkte nur die Hälfte $\left(\frac{P}{2}\right)$ der auf einen der zwischenliegenden Knotenpunkte fallenden Last (P) zu tragen haben, so daß also z. B. bei m Feldern des ganzen oberen Gurtes die Belastung pro Knotenpunkt

$$P = \frac{2(b \cdot s \cdot q)}{m} \text{ kg}$$

sich ergibt und demnach auch $\frac{P}{2}$ bestimmt ist.

In manchen Fällen ist die Belastung p pro qm Grundrißfläche (Horizontalprojektion) gegeben. Ist l die horizontale Entfernung der Auflagerpunkte (Stützweite), so bestimmt sich analog

$$P = \frac{b \cdot l \cdot p}{m} \text{ kg}$$

und damit auch $\frac{P}{2}$. Ein Mittelwert für p bei Deckungen in Glas und Metall ist 120 kg/qm.

Man bestimme nach Anbringung sämtlicher P aus dem Träger als Ganzes die beiden Auflagerdrücke W_1 und W_2. Für symmetrische Träger ist $W_1 = W_2 = \frac{\Sigma P}{2}$. Man konstruiere für die angebrachte Belastung nach § 6 A oder B einen Kräfteplan (I) (bei symmetrischen Trägern genügt die Konstruktion desselben für die Hälfte des Trägers) oder verfahre analytisch nach § 7.

B) Berechnung für einseitigen Winddruck.

(Fig. 18a und b, 19a und b.)

Um die Auflagerdrücke statisch bestimmbar zu machen, treffen wir die Annahme, daß eines der Auflager z. B. A_1 nur einen vertikalen Druck W_1 ausüben (Rollenlager), das andere dagegen außer der Ausübung eines vertikalen Drucks einer seitlichen Verschiebung des Trägers horizontalen Reibungswiderstand entgegensetzen könne (Gleitlager). Durch diese Annahme sind wir genötigt, zwei Windrichtungen in Rechnung zu nehmen: von links nach rechts und umgekehrt.

Es sei $n = 200 \cdot \sin^2(\varphi + 10)$ bestimmt (I, 2) und der gesamte Winddruck auf die geneigte Fläche auf die einzelnen Knotenpunkte gleichmäßig verteilt (am Auflager und Scheitel je die Hälfte), so kommt auf einen derselben, normal zur Dachfläche gerichtet, der Winddruck

$$N = \frac{b \cdot s \cdot n}{\frac{m}{2}} \text{kg} = \frac{2(bsn)}{m} \text{kg}$$

(m Zahl der Felder des ganzen oberen Gurtes
b Binderweite in m
s Sparrenlänge in m
n Winddruck pro qm geneigter Dachfläche)

damit ist auch für Scheitel und Auflager $\frac{N}{2}$ bestimmt.

Für beide Fälle ergibt sich (Fig. 18a u. Fig. 19a), lie Resultante R aller nit W_1 und W_2 im chgewicht sein muß, die Wirkungslinien drei Kräfte in einem kt sich schneiden müs- die Wirkungslinie W_2 durch Verbindung A_2 mit dem Schnitt- kt T der Resultanten R Winddruckes und der ikalen Wirkungslinie W_1, wodurch W_1 und sich mittelst Kräfte- ecks über R nach n Richtungen ergeben . 18b, Fig. 19b).

Da der Winddruck hmäßig über die Dach- ie sich verteilt, greift e Resultante R in n Mittelpunkt an.

Man konstruiere nun ohl für den links- gen, als rechtsseitigen ddruck je einen Kräfte- (II u. III).

Kräftepläne sind je- nicht für den halben, sondern den ganzen Träger uführen.

Fig. 18a.

Fig. 18b.

Fig. 19a.

Fig. 19b.

C) Ermittlung der Maximalkräfte für jeden Stal

Die durch die erste der beiden Belastunge (Eigengewicht + Schneedruck) hervorgerufene Bean spruchung irgend eines Stabes kann durch diejenig infolge einseitigen Winddruckes vermehrt oder verminder werden, je nachdem die letztere der ersteren gleich artig oder entgegengesetzt ist. Im zweiten Fa kann sogar die letztere die erstere überwiegen, so da der betreffende Stab für beide Arten der Beanspruchun (diejenige durch Eigengewicht + Schneelast allein un die entgegengesetzte, aus der Kombination mit derjenige infolge einseitigen Winddruckes hervorgegangene) ge nügende Sicherheit bieten muß. Sind die durch beid Belastungsarten hervorgerufenen Beanspruchungen gleich artig, so ist die im Stab herrschende Maximalkraft, fü welche er genügende Sicherheit zu bieten hat, di Summe beider bezw. die größere der beiden Summen welche in Berücksichtigung der beiden Fälle des Wind druckes in dieser Hinsicht zu bilden möglich sind.

Im übrigen ist die Ermittlung dieser Maximalkraft fü jeden Stab und jeden Fall Aufgabe einfacher Überlegung, di den Zweck hat, die größtmögliche Inanspruchnahme durc Kombination der ungünstigsten Fälle als Grundlage für di Dimensionsberechnung der Stabquerschnitte zu erhalten

Besondere Fälle.

I. Dachträger von flacher Horizontalneigun des oberen geraden Gurtes, für welche bei alle drei Belastungsarten (also auch bei einseitigem Win druck, vergl. Fig. 18a und 19a) und bei Belastun irgend eines Knotenpunktes die Wirkungslini von W_2 stets ganz außerhalb des Trägers verläuf

*Die Momenten*punkte für die Stäbe des oberen un

unteren Gurtes sind die Knotenpunkte, liegen also in diesem Fall sämtlich und zwar für alle drei Belastungsarten stets innerhalb der Wirkungslinien von W_1 und W_2. Das Maximum der Beanspruchung der Gurtungsstäbe tritt also nach § 8, I, bei möglichster Vollbelastung ein, d. h. die durch die drei Belastungsarten erzeugten Kräfte sind für jeden Stab des oberen oder unteren Gurtes je gleichartig. Sind daher O′, O″, O‴ bezw. U′, U″, U‴ die Werte einer und derselben Stabkraft in den drei Kräfteplänen I, II und III, so ist die größere der Summen $\left\{\begin{matrix} O' + O'' \text{ und } O' + O''' \\ U' + U'' \text{ und } U' + U''' \end{matrix}\right\}$ die Maximalkraft im betr. Stab des $\left\{\begin{matrix} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{matrix}\right\}$ Gurtes.

Ist für den angenommenen Fall der untere Gurt eine nach unten konkave, gebrochene Linie, deren Glieder gegen die Mitte hin immer flacher werden wie z. B. in Fig. 20, so liegen die Momentenpunkte auch

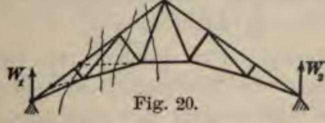


Fig. 20.

für die Kräfte der Füllglieder für alle drei Belastungsarten stets innerhalb der Wirkungslinien von W_1 und W_2. Nach § 8, II, tritt für diesen Fall das Maximum der Stabkraft des Füllgliedes ebenfalls bei möglichster Vollbelastung ein, d. h. die durch die drei Belastungsarten hervorgerufenen Kräfte irgend eines Füllgliedes sind gleichartig. Bezeichnen D′, D″, D‴ die Werte dieser Stabkraft in den drei Kräfteplänen I, II und III, so ist wieder die größere der Summen $D' + D''$ und $D' + D'''$ die Maximalkraft in jenem Füllglied (vergl. unten II).

II. Dachträger, für welche beide Gurten gerade Linien bilden wie z. B. Fig. 18a. Für alle drei Belastungsarten und für jede Lage der Wirkungslinien von W_1 und W_2 ergibt sich die Vereinfachung, daß die Momentenpunkte für die Füllglieder mit den Auflagerpunkten A_1 und A_2 zusammenfallen.

Bei linksseitigem Winddruck (Fig. 18a) ergibt sich dann für ein Füllglied der rechtseitigen Trägerhälfte: Die Resultante der am links abgeschnittenen Trägerteil angreifenden Kräfte ist gleich $-W_2$ (folgt aus dem Gleichgewicht des ganzen Trägers). Daher Moment dieser Resultante um den dem betreffenden Füllglied zugehörigen Momentenpunkt $A_2 = 0$, also auch Moment von $D = 0$, daher $\underline{D = 0}$.

Bei rechtsseitigem Winddruck (Fig. 19a) ergibt sich für ein Füllglied der linksseitigen Trägerhälfte: Am links abgeschnittenen Trägerteil greift nur W_1 an; das Moment von W_1 um den dem betreffenden Füllglied zugehörigen Momentenpunkt $A_1 = 0$, somit Moment von $D = 0$, daher $\underline{D = 0}$.

Anmerkung. Für Dächer mit flachem oberen Gurt genügt daher oft für sämtliche Stäbe die Konstruktion eines einzigen Kräfteplanes mit vertikaler Vollbelastung sämtlicher Knotenpunkte, in welcher die gleichzeitige Wirkung von Eigengewicht, Schneelast und Winddruck zum Ausdruck kommt. Mittelwerte der Belastung hierfür sind (Normen der Berliner Baupolizei):

Deckung	kg/qm Grundrißfläche flach steil
Metall oder Glas	125—150
Schiefer	200—240
Ziegel	250—300
Holzzement	350

Beispiel.

§ 10. Belgischer Dachstuhl (Fig. 21 a).

Spannweite $l = 12$ m.

Entfernung zweier Träger $b = 4$ m.

Oberer Gurt 2 : 3; $s = 7{,}2$ m (Sparrenlänge); $\varphi = 33^0$.

Unterer Gurt 1 : 3.

Belastung: A) Eigengewicht + Schneedruck 125 ;/qm Grundrißfläche.

B) Winddruck pro qm Dachfläche (normal)

$$n = 200 \cdot \sin^2(33^0 + 10^0) \doteq 100 \text{ kg}.$$

Belastung pro Knotenpunkt des oberen Gurtes:

r A) $P = \frac{12 \cdot 4 \cdot 125}{6} = 1000$ kg, an den Auflagern

$$\frac{P}{2} = 500 \text{ kg}.$$

r B) $N = \frac{7{,}2 \cdot 4 \cdot 100}{3} = 960$ kg (einseitiger Winddruck),

am Auflager und Scheitel je $\frac{N}{2} = 480$ kg.

) Berechnung für Eigengewicht + Schneelast.

Auflagerwiderstände $W_1 = W_2 = \frac{6 \cdot P}{2} = 3000$ kg.

Der Kräfteplan I (Fig. 21 b) ist nach Cremona auf- zeichnet (§ 6, A).

räftepolygone der einzelnen Knoten- ınkte: Die aus jedem Polygon sich gebenden gesuchten Kräfte sind durch e Wellenlinie bezeichnet. Dasjenige r VI läßt sich zur Zeichenprobe be- nützen:

I. $W_1 - \frac{P}{2}$, $\widetilde{O_1, U_1}$

II. $P, O_1, \widetilde{D_1, O_2}$

III. $U_1, D_1, \widetilde{U_2, D_2}$

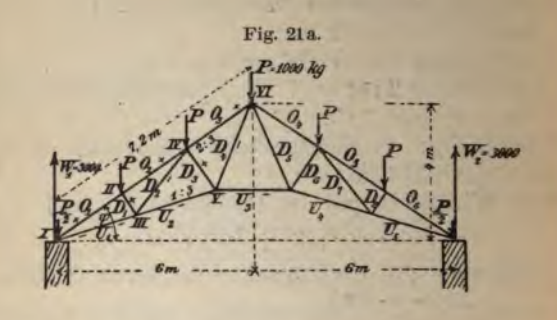
IV. $P, O_2, D_2, \widetilde{D_3, O_3}$

V. $U_2, D_3, \widetilde{U_3, D_4}$

VI. $P, O_3, D_4, \widetilde{D_5, O_4}$

; muß $= D_4$, $O_4 = O_3$ sich ergeben.

Fig. 21 a.



Kräfteplan I (nach Cremona)
für Eigengewicht + Schneelast
P = 1000 kg.

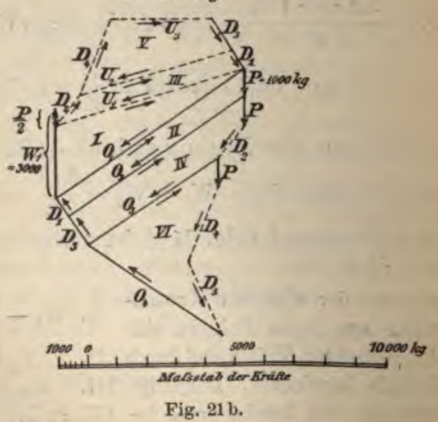


Fig. 21 b.

B) Berechnung für Winddruck.

a) Linksseitiger Winddruck.

Auflagerwiderstände W_1 und W_2 sind für die Voraussetzung linksseitigen Rollenlagers und rechtsseitigen Gleitlagers nach § 9, II, B bestimmt (Fig. 22a und b).

Kräfteplan II (Fig. 22c) für linksseitigen Winddruck ist nach der Ritterschen Schnittmethode konstruiert (§ 6, B).

Kräftepolygone der Fig. 22c:

1. Für Schnitt I:

$$A_0 A_1 B_1 C \left(A_0 A_1 = W_1; \quad A_1 B_1 = \frac{N}{2}; \quad \widetilde{O_1, U_1}\right).$$

2. Für Schnitt II:

$$C A_0 A_1 B_1 B_2 D \left(A_1 B_2 = \frac{N}{2} + N; \quad \widetilde{D_1, O_2}\right).$$

3. Für Schnitt III:

$$A_0 A_1 B_1 B_2 D E \left(A_1 B_2 = \frac{N}{2} + N; \quad \widetilde{D_2, U_2}\right).$$

4. Für Schnitt IV:

$$E A_0 A_1 B_1 B_2 B_3 F \left(A_1 B_3 = \frac{N}{2} + N + N; \quad \widetilde{D_3, O_3}\right).$$

5. Für Schnitt V:

$$A_0 A_1 B_1 B_2 B_3 F G \left(A_1 B_3 = \frac{N}{2} + N + N; \quad \widetilde{D_4, U_3}\right).$$

6. Für Schnitt VI:

$$G A_0 A_1 B_1 B_2 B_3 B_4 H \left(A_1 B_4 = \frac{N}{2} + N + N + \frac{N}{2}; \quad \widetilde{D_5, O_4}\right).$$

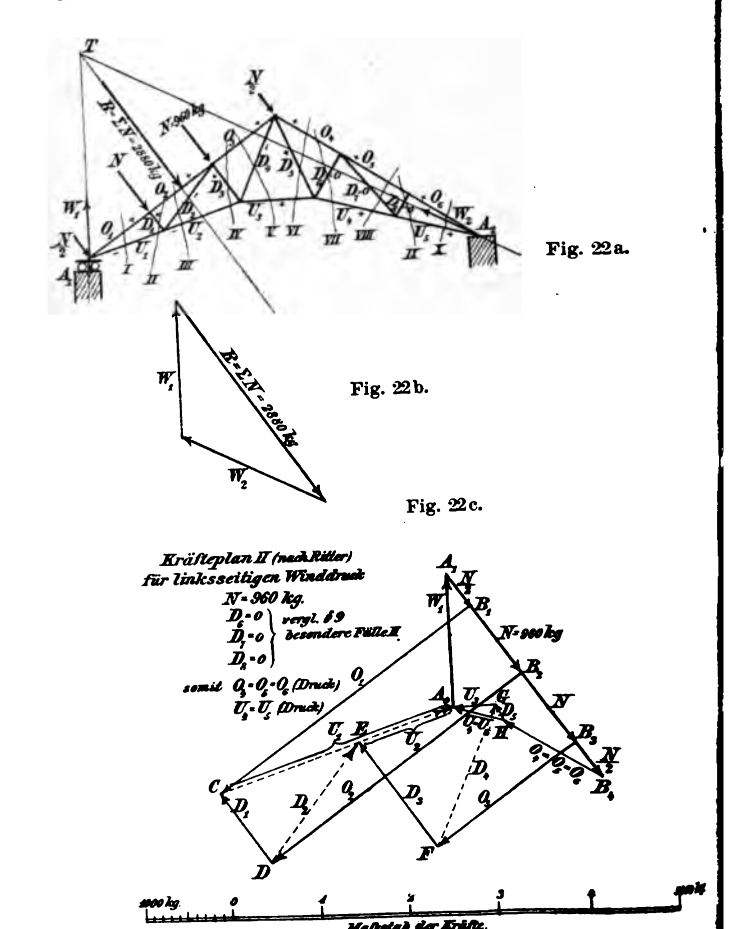


Fig. 22a.

Fig. 22b.

Fig. 22c.

7. Für Schnitt VII:

Nach § 9, Besondere Fälle, II., ist $D_6 = 0$; somit muß die Parallele durch A_0 zu U_4 durch den Endpunkt H von O_4 gehen (Zeichenprobe), also Polygon

$$A_0 A_1 B_1 B_2 B_3 B_4 H \; (A_1 B_4 = \Sigma N; \;\; \widetilde{U_4}).$$

8. Für Schnitt VIII:

Nach § 9, Besondere Fälle, II., ist $D_7 = 0$, daher Kräftepolygon

$H A_0 A_1 B_1 B_2 B_3 B_4$ (identisch mit dem vorigen, also $\widetilde{O_5} = O_4$).

9. Für Schnitt IX:

Analog $D_8 = 0$; somit Kräftepolygon

$A_0 A_1 B_1 B_2 B_3 B_4 H$ (identisch mit dem vorigen; also $\widetilde{U_5} = U_4$).

10. Für Schnitt X:

$H A_0 A_1 B_1 B_2 B_3 B_4$ (identisch mit dem vorigen; $\widetilde{O_6} = O_5 = O_4$).

b) Rechtsseitiger Winddruck.

Auflagerwiderstände W_1 und W_2 sind für die Voraussetzung linksseitigen Rollenlagers und rechtsseitigen Gleitlagers nach § 9, II., B bestimmt (Fig. 23a und b).

Kräfteplan III (Fig. 23c) für rechtsseitigen Winddruck ist nach der Ritterschen Schnittmethode konstruiert (§ 6, B).

Kräftepolygone der Fig. 23c:

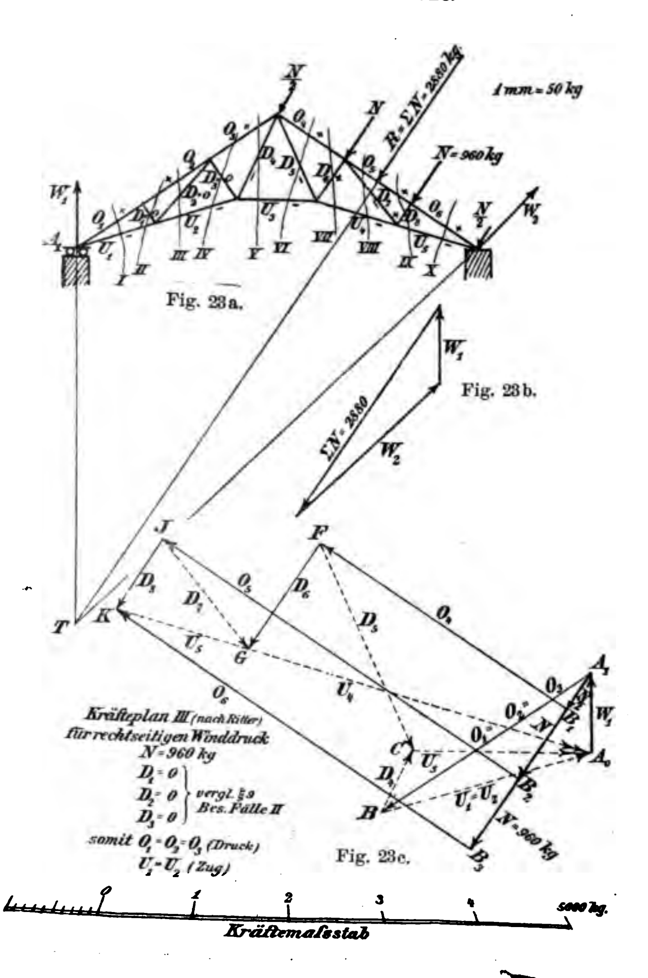
1. Für Schnitt I:

$$A_0 A_1 B \; (A_0 A_1 = W_1; \;\; \widetilde{O_1 \text{ und } U_1}).$$

2. Für Schnitt II:

$B A_0 A_1$ (identisch mit dem vorigen;

$\widetilde{D_1 = 0}$, $\widetilde{O_2 = O_1}$, vergl. § 9, Besondere Fälle, II.).


1 mm = 50 kg
R = ΣN = 2880 kg
N = 960 kg
Fig. 23 a.
Fig. 23 b.
ΣN = 2880
Kräfteplan III (nach Ritter) für rechtseitigen Winddruck
N = 960 kg
D₁ = 0
D₂ = 0
D₃ = 0
vergl. § 9 Bes. Fälle II
somit O₁ = O₂ = O₃ (Druck)
U₁ = U₂ (Zug)
N = 960 kg
Fig. 23 c.
0 1 2 3 4 5000 kg.
Kräftemafsstab

3. Für Schnitt III:

$A_0 A_1 B$ (identisch mit dem vorigen; $\widetilde{D_2 = O}$; $\widetilde{U_2 = U_1}$).

4. Für Schnitt IV:

$B A_0 A_1$ (identisch mit dem vorigen; $\widetilde{D_3 = O}$; $\widetilde{O_3 = O_2}$).

5. Für Schnitt V:

$$A_0 A_1 B C \left(A_0 A_1 = W_1;\quad \widetilde{D_4,\ U_3}\right).$$

6. Für Schnitt VI:

$$C A_0 A_1 B_1 F \left(A_1 B_1 = \frac{N}{2};\quad \widetilde{D_5,\ O_4}\right).$$

7. Für Schnitt VII:

$$A_0 A_1 B_1 F G \left(A_1 B_1 = \frac{N}{2};\quad \widetilde{D_6,\ U_4}\right).$$

8. Für Schnitt VIII:

$$G A_0 A_1 B_1 B_2 I \left(A_1 B_2 = \frac{N}{2} + N;\quad \widetilde{D_7,\ O_5}\right).$$

9. Für Schnitt IX:

$$A_0 A_1 B_1 B_2 I K \left(A_1 B_2 = \frac{N}{2} + N;\quad \widetilde{D_8,\ U_5}\right).$$

10. Für Schnitt X:

Das aus $\frac{N}{2}$, N, N, W_1, U_5, O_6 gebildete Kräftepolygon muß sich schließen. Daher muß, wenn $A_1 B_3 = \frac{N}{2} + N + N$, die Verbindungslinie der Punkte K und B_3 parallel O_6 sein (Zeichenprobe) und O_6 vorstellen. Also Kräftepolygon:

$$K A_0 A_1 B_1 B_2 B_3 \left(A_1 B_3 = \frac{N}{2} + N + N;\quad \widetilde{O_6}\right).$$

C) Kombination der aus den Kräfteplänen I, II und III erhalt Resultate zur Maximalkraft.

+ bedeutet Druckspannung, — Zugspannung, die Zahlen bedeuten kg.

Stab	Eigengewicht + Schneelast I	linksseit. Winddruck II	rechtsseit. Winddruck III	Max kr
O_1	+ 7800	+ 3550	+ 2850	+ 1
O_2	+ 7200	+ 3550	+ 2850	+ 1
O_3	+ 5400	+ 1950	+ 2850	+
O_4	+ 5400	+ 1250	+ 3800	+
O_5	+ 7200	+ 1250	+ 4800	+ 1
O_6	+ 7800	+ 1250	+ 4800	+ 1
U_1	— 6750	— 2850	— 2450	—
U_2	— 5400	— 1150	— 2450	—
U_3	— 3300	+ 500	— 2000	—
U_4	— 5400	+ 600	— 4000	—
U_5	— 6750	+ 600	— 5500	— 1
D_1	+ 750	+ 1000	0	+
D_2	— 1500	— 1700	0	—
	+ 1200	+ 1500	0	+

Stab	Eigengewicht + Schneelast I	linksseit. Winddruck II	rechtsseit. Winddruck III	Maximal-kraft
D_4	— 2700	— 1750	— 800	— 4450
D_5	— 2700	+ 200	— 2550	— 5250
D_6	+ 1200	0	+ 1450	+ 2650
D_7	— 1500	0	— 1600	— 3100
D_8	+ 750	0	+ 950	+ 1700

Vorstehende Resultate sind erhalten worden unter Annahme eines Rollenlagers am linken Auflager und eines Gleitlagers am rechten Auflager. Trifft man die umgekehrte Anordnung, so würden sich die oben gefundenen Maximalwerte entsprechend vertauschen. Da nun für die meisten Fälle der Praxis der Träger auch hinsichtlich der Stabquerschnitte symmetrisch angeordnet wird, so ist für die Sicherheit der Konstruktion der größte der beiden auf diese Weise auf zwei symmetrisch gelegene Stäbe entfallenden Maximalkraftwerte für diese maßgebend. Daher sind zur Berechnung der Stabquerschnitte die in Fig. 24 eingeschriebenen Zahlwerte zugrunde zu legen.



Fig. 24.

§ 11. Statische Berechnung der Brückenträger.

Die Aufgabe ist wieder die Ermittlung der größten in den Stäben wirkenden Kräfte.

Die Belastung ist wieder eine unveränderlich und stetig wirkende, zu welcher noch eine zufällig wirkende hinzutreten kann. Die erstere besteht aus dem Eigengewicht, d. h. dem Eisengewicht + Gewicht der getragenen Konstruktion, als welche bei Straßenbrücken das Gewicht der Chaussierung zu betrachten ist; die letztere ist die Verkehrslast (mobile Last).

Die Methode möge an folgendem analytisch durchgeführten Beispiel ersehen werden.

Straßenbrücke (Fig. 25a).

Stützweite $l = 16$ m, Höhe des Trägers $h = 2$ m.

Felderbreite $e = 2$ m, Entfernung beider Träger $b = 4$ m.

Fahrbahn unten; Angriffspunkte sämtlicher Kräfte die Knotenpunkte des unteren Gurtes.

Unveränderliche Belastung:

Eisengewicht pro qm Brückenfläche empirisch für Straßenbrücken bis 35 m Stützweite:

$$6{,}3\,l + 100 = 200 \text{ kg}.$$

Gewicht der Chaussierung (20 cm hoch, spez. Gew. = 2,25) pro qm Brückenfläche $1 \cdot 1 \cdot 0{,}2 \cdot 2250 = 450$ kg.

Verkehrslast (Menschengedränge) pro qm Brückenfläche 400 kg.

Gesucht die in den Stäben O_3, V_4, D_4, U_5 wirkenden größten Beanspruchungen (Fig. 25a, b, c, d).

Auflösung.

Die Belastung verteilt sich gleichförmig auf die Knotenpunkte des unteren Gurtes (in den Auflagerpunkten je die Hälfte). Daher:

Unveränderliche Belastung pro Knotenpunkt

$$P = \frac{b \cdot e (200 + 450)}{2} = 2600 \text{ kg}$$

$$\left(\text{in den Auflagerpunkten } \frac{P}{2} = 1300 \text{ kg}\right).$$

Verkehrslast pro Knotenpunkt $Q = \frac{b \cdot e \cdot 400}{2} = 1600$ kg

$$\left(\text{in den Auflagerpunkten } \frac{Q}{2} = 800 \text{ kg}\right).$$

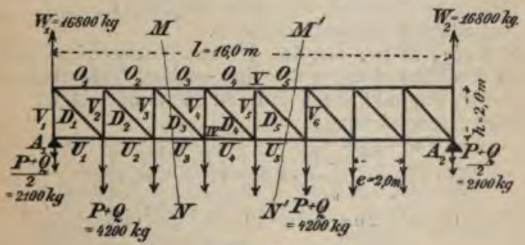


Fig. 25 a.

A) Oberer Gurt $\left(O_3^{max}\right)$.

Nach § 8, I tritt die größte Beanspruchung eines Gliedes des oberen Gurtes (Druck) bei möglichster Vollbelastung ein. In sämtlichen inneren Knotenpunkten sind also die Lasten $P + Q = 4200$, in den Auflagerpunkten $\frac{P+Q}{2} = 2100$ kg anzubringen (Fig. 25 a).

Auflagerwiderstände $W_1 = W_2 = \frac{8(P+Q)}{2} = 16800$ kg.

Schnitt MN: O_3, D_3, U_3 im Gleichgewicht mit W_1 und den drei linksseitigen Belastungen (Gleichgewicht des links abgeschnittenen Trägerteiles).

Momentenpunkt (nach Ritter): Knotenpunkt IV:

Momentengleichung:

$$W_1 \cdot 3e - \frac{P+Q}{2} \cdot 3e - (P+Q)2e - (P+Q)e - O_3^{max} \cdot h = 0,$$

$$O_3^{max} \cdot h = \frac{15}{2}(P+Q)e,$$

$$\underline{O_3^{max}} = 7{,}5 \cdot 4200 = \underline{31\,500 \text{ kg}} \text{ (Druck)}.$$

B) Unterer Gurt $\left(U_5^{max}\right)$.

Nach § 8, I tritt die größte Beanspruchung eines Gliedes des unteren Gurtes (Zug) ebenfalls bei möglichster Vollbelastung ein. Belastung demnach wie oben (Fig. 25a).

Auflagerwiderstände wie oben.

Schnitt M′N′: O_5, D_5, U_5 im Gleichgewicht mit W_1 und den fünf Belastungen des linksseitigen Trägerteiles.

Momentenpunkt (nach Ritter): Knotenpunkt V;

Momentengleichung:

$$\left.\begin{array}{l} W_1 \cdot 4e - \frac{P+Q}{2} \cdot 4e - (P+Q)3e \\ -(P+Q)2e - (P+Q)e - U_5^{max} \cdot h \end{array}\right\} = 0,$$

$$U_5^{max} \cdot h = 8(P+Q)e,$$

$$\underline{U_5^{max}} = \underline{33\,600 \text{ kg}} \text{ (Zug)}.$$

C) Diagonalen $\left(D_4^{max\ Druck}, D_4^{max\ Zug}\right)$.

Zur Bestimmung von D_4 dient der Schnitt M″N″ (Fig. 25b). Momentenpunkt liegt im Schnitt von O_4 und U_4, *also außerhalb W′* und W″. Nach § 8, III tritt daher die *Maximalbeanspruchung* von D_4 durch die Verkehrslast bei *einseitiger möglichster* Vollbelastung des Trägers ein.

Die Verkehrslast erzeugt in D_4 (vergl. § 8, III):

$D_4^{\text{max Druck}}$ bei linksseitiger Vollbelastung mit Q

$D_4^{\text{max Zug}}$ bei rechtsseitiger Vollbelastung mit Q.

Außerdem erzeugt das Eigengewicht eine stets in gleicher Größe wirkende Stabkraft D_4. Von den genannten drei Kräften kann die letztgenannte einzeln tätig sein oder in Kombination mit einer der ersten wirken, daher ist die Kenntnis der drei auf diese Weise entstehenden Kräfte D_4 einzeln nötig.

a) **Beanspruchung von D_4 bei durchgehender Belastung mit P** (Eigengewicht) = 2600 kg.

Schnitt M″N″ (Fig. 25b): $W_1 = W_2 = \frac{8 \cdot P}{2} = 10400$ kg; O_4, D_4, U_4 im Gleichgewicht mit W_1 und den P des linksseitigen Trägerteiles.

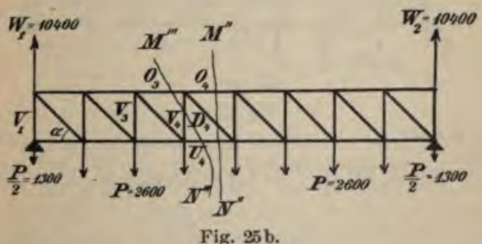


Fig. 25b.

$\Sigma Y = 0$:

$$-W_1 + \frac{P}{2} + 3P + D_4 \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$D_4 \sin\alpha = \frac{P}{2},$$

*) $\underline{D_4} = \frac{1300}{\sin 45} = \text{rd} \cdot \underline{1860 \text{ kg}}$ (Zug).

b) **Beanspruchung von D_4 (Druck) bei linksseitiger Vollbelastung mit Q (Verkehrslast).**

Schnitt M″N″ (Fig. 25c): Momentengleichung um das rechtsseitige Auflager zur Bestimmung des linksseitigen Auflagerdruckes W_1': $W_1' \cdot 8e - \frac{Q}{2} \cdot 8e - Qe(5 + 6 + 7) = 0$.

Daher:

$$W_1' \cdot 8 - 22Q = 0,$$

$$W_1' = \frac{11Q}{4} = \underline{4400 \text{ kg}}.$$

O_4, D_4, U_4 im Gleichgewicht mit W_1' und den Q des linksseitigen Trägerteiles, daher analog wie oben:

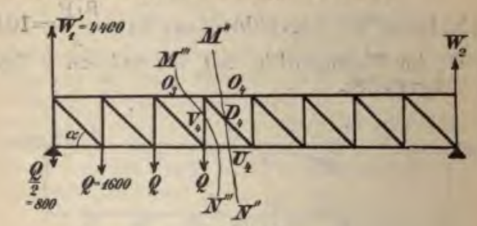


Fig. 25c.

$\Sigma Y = 0$:

$$-W_1' + \frac{Q}{2} + 3Q - D_4 \sin\alpha = 0,$$

$$D_4 \cdot \sin\alpha = \frac{3Q}{4},$$

**) $\underline{D_4} = \frac{1200}{\sin 45} = \text{rd} \cdot \underline{1715 \text{ kg}}$ (Druck).

c) **Beanspruchung von D_4 (Zug) bei rechtsseitiger Vollbelastung mit Q (Verkehrslast).**

Schnitt M″N″ (Fig. 25d): Momentengleichung um das rechtsseitige Auflager zur Bestimmung des linksseitigen Auflagerdruckes W_1'': $W_1'' \cdot 8e - Qe(1 + 2 + 3 + 4) = 0$.

Daher:

$$W_1'' = \frac{5Q}{4} = 2000 \text{ kg};$$

O_4, D_4, U_4 im Gleichgewicht mit W_1'', daher analog wie oben:

$\Sigma Y = 0$:

$$-W_1'' + D_4 \sin\alpha = 0,$$

$$D_4 \sin\alpha = \frac{5Q}{4},$$

$$***) \quad \underline{D_4} = \frac{2000}{\sin 45} = \text{rd} \cdot \underline{2860 \text{ kg}} \text{ (Zug)}.$$

Fig. 25 d.

Durch Kombination der Resultate *) und **) ergibt sich ein Zug von 145 kg, durch Kombination derjenigen von *) und ***) ein Zug von 4720 kg. D_4 ist also, da auch das Eigengewicht allein nur Zug in ihr erzeugt, nur Zugdiagonale mit dem Maximalzug $\underline{D_4^{\text{max Zug}} = 4720 \text{ kg}}$ $(D_4^{\text{max Druck}} = 0)$.

D) Vertikalständer $(V_4^{\text{max Druck}}, V_4^{\text{max Zug}})$.

Zur Bestimmung von V_4 dient Schnitt $M'''N'''$ (Fig. 25 b). Der zugehörige Momentenpunkt liegt im Schnitt von O_3 und U_4, also außerhalb W_1 und W_2. Nach § 8, III tritt daher die Maximalbeanspruchung von V_4 durch die Verkehrslast bei ein-

seitiger möglichst voller Belastung ein. Da nun diese Belastung nach § 8, III für $\left\{\begin{matrix} V_4^{\max\ Zug} \\ V_4^{\max\ Druck} \end{matrix}\right\}$ dieselbe ist wie für $\left\{\begin{matrix} D_4^{\max\ Druck} \\ D_4^{\max\ Zug} \end{matrix}\right\}$ so ergibt sich:

a) Beanspruchung von V_4 bei durchgehender Belastung mit P (Eigengewicht).

Schnitt $M'''N'''$ (Fig. 25b): $W_1 = 4P = 10400$ kg; O_3, V_4, U_4 sind im Gleichgewicht mit W_1 und den P des linksseitigen Trägerteiles. Daher:

$$\Sigma Y = 0:$$

$$-W_1 + \frac{P}{2} + 3P + V_4 = 0,$$

$$^{*)} \quad \underline{V_4} = \frac{P}{2} = \underline{1300 \text{ kg}} \text{ (Druck).}$$

b) Beanspruchung von V_4 (Zug) bei linksseitiger Vollbelastung mit Q (Verkehrslast).

Schnitt $M'''N'''$ (Fig. 25c): $W_1' = \frac{11Q}{4} = 4400$ kg (siehe C, b); O_3, V_4, U_4 sind im Gleichgewicht mit W_1' und den Q des linksseitigen Trägerteiles. Daher:

$$\Sigma Y = 0:$$

$$-W_1' + \frac{Q}{2} + 3Q - V_4 = 0,$$

$$^{**)} \quad \underline{V_4} = \frac{3}{4}Q = \underline{1200 \text{ kg}} \text{ (Zug).}$$

c) Beanspruchung von V_4 (Druck) durch rechtsseitige Vollbelastung mit Q (Verkehrslast).

Schnitt $M'''N'''$ (Fig. 25d): $W_1'' = \frac{5Q}{4} = 2000$ kg (siehe C, c); O_3, V_4, U_4 im Gleichgewicht mit W_1''. Daher:

$\Sigma Y = 0$:

$$-W_1'' + V_4 = 0,$$

$$\text{***)} \quad \underline{V_4} = \underline{2000 \text{ kg}} \text{ (Druck).}$$

Die Kombination der Resultate *) und **) liefert einen Druck von 100 kg, diejenige von *) und **) einen Druck von 3300 kg; das Eigengewicht allein erzeugt einen Druck von 1300 kg.

V_4 wird also nur auf Druck beansprucht mit dem Maximalwert

$$\underline{V_4}^{\text{max Druck}} = \underline{3300 \text{ kg}} \left(V_4^{\text{max Zug}} = 0\right).$$

III. Kapitel.

Spreng- und Hängwerke.

Eine an sich nicht starre Verbindung starrer vertikal belasteter Stäbe, die bei Gleichgewicht außer den vertikalen Widerstandskräften V der Auflager an jedem derselben noch eine horizontale Auflagerreaktion H erfordert, heißt $\left\{\begin{matrix}\text{Sprengwerk,}\\ \text{Hängwerk,}\end{matrix}\right\}$ wenn die Kräfte H $\left\{\begin{matrix}\text{einander entgegen}\\ \text{voneinander weg}\end{matrix}\right\}$ gerichtet sind.

A) Sprengwerke.

§ 12. Einfache Sprengwerke.

I. Einfaches unsymmetrisches Sprengwerk (Fig. 26) mit Belastung im Scheitel.

Berechnung der an den beiden Stäben tätigen Kräfte.

Man ersetze die Auflager durch ihre Widerstände V_1 und H_1 bezw. V_2 und H_2, so folgt aus dem Gleichgewicht des Ganzen:

$\Sigma X = 0$:

1) $$H_1 - H_2 = 0$$

$\Sigma Y = 0$:

2) $$-V_1 - V_2 + P = 0$$

Σ-Momente um A_1:

3) $$P \cdot a - V_2(a+b) + H_2 \cdot e = 0.$$

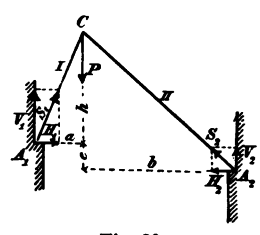


Fig. 26.

Aus dem Gleichgewicht des in C freigemachten, in C mit P belasteten (vergl. § 1, III u. VIa) und an Stelle der Wirkung des Stabes II mit den Kräften H und V versehenen Stabes I folgt:

Σ-Momente um $C = 0$:

4) $$V_1 \cdot a - H_1 \cdot h = 0.$$

Aus den Gleichungen 1)—4) sind die vier Unbekannten H_1, H_2, V_1 und V_2 bestimmt. Da beide Stäbe nur von Kräften in den Endpunkten angegriffen werden, so erleiden sie Druckspannung (vergl. § 1, II). Für Stab A_1C ist diese $S_1 = \sqrt{H_1^2 + V_1^2}$, für Stab A_2C $S_2 = \sqrt{H_2^2 + V_2^2}$.

Spezieller Fall: Einfaches symmetrisches Sprengwerk mit Auflagern in gleicher Höhe.

Aus 2): $\underline{V_1} = \underline{V_2} = \underline{\frac{P}{2}}$ $\left(\begin{matrix} a = b \\ e = o \end{matrix}\right)$

Aus 4): $\underline{H_1} = \underline{H_2} = \frac{V_1 a}{h} = \underline{\frac{Pa}{2h}}$

II. Symmetrisches und symmetrisch belastetes Sprengwerk mit Spannriegel.

Das Gleichgewicht des aus den Stäben I, II, III bestehenden Sprengwerks (Fig. 27) als Ganzes liefert:

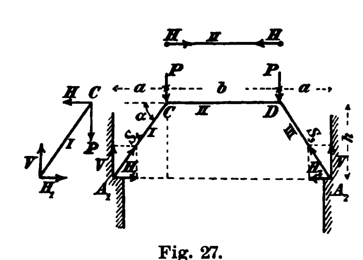


Fig. 27.

$\Sigma X = 0$:

1) $H_1 - H_2 = 0;\ H_1 = H_2$

$\Sigma Y = 0$:

2) $2V - 2P = 0;\ V = P.$

Freimachung des Stabes I: In C ist statt II eine in der Richtung von II angreifende Kraft H anzubringen. P sei ebenfalls Stab I zugeteilt. Dann folgt aus dem Gleichgewicht dieses Stabes

Momenten-Gleichung um C:

3) $Va - H_1 \cdot h = 0;\ \underline{H_1} = \frac{Va}{h} = \underline{\frac{Pa}{h}} = \underline{H_2}.$

$\Sigma X = 0$:

4) $$H_1 - H = 0$$

$$\underline{H = H_1 = H_2 = \frac{Pa}{h}}.$$

Resultate:

Stab I Druckspannung $S_1 = \sqrt{V^2 + H_1^2} = \frac{P}{\sin\alpha} = S_3$,

Stab II Druckspannung $H = \frac{Pa}{h} = \frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}$.

§ 13. Gleichgewichtsform eines Sprengwerks bei gleichförmig auf dessen Horizontalprojektion stetig verteilter Belastung.

Die Belastung betrage q kg/m Horizontalprojektion. Sie werde (Fig. 28) mittelst Vertikalständer auf die Knotenpunkte übertragen, so daß bei Gleichgewicht die Stäbe Druckspannung erleiden. Der Koordinaten-Ursprung liege in der Mitte 0 eines beliebigen Stabes (die x-Achse sei horizontal). Man schneide diesen in 0 und einen beliebigen anderen Stab, z. B. III, in beliebigem Punkte durch, so bleibt der zwischen beiden Schnittstellen befindliche Teil des Sprengwerks im Gleichgewicht, wenn an ihm in den Schnittstellen die betreffenden Stabkräfte bezw. ihre Komponenten H_0 und V_0, H und V angebracht werden.

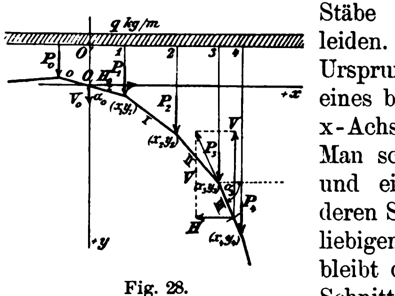


Fig. 28.

Jeder Knotenpunkt erhält eine konzentrierte Last, die gleich der auf die beiden Hälften der anstoßenden *Felder kommenden* gleichförmigen Belastung ist. Die

Resultante der an den Knotenpunkten 1, 2 und 3 angreifenden P ist daher gleich der gleichförmigen Last von O′ bis 3 + der Hälfte der gleichförmigen Last des Feldes 3 bis 4, daher

$$P_1 + P_2 + P_3 = q\,x_3 + \frac{q\,(x_4 - x_3)}{2} = \frac{q\,(x_4 + x_3)}{2}.$$

Nun folgt aus dem Gleichgewicht des betrachteten Konstruktionsteiles:

$\Sigma X = 0$:

1) $$H_0 - H = 0;\ H = H_0,$$

d. h. Horizontalschub H ist für jede Schnittstelle des Sprengwerks konstant.

$\Sigma Y = 0$:

2) $$-V + (P_1 + P_2 + P_3) + V_0 = 0$$

daher auch $$+\frac{V}{H} - \frac{q(x_4 + x_3)}{2H} - \frac{V_0}{H_0} = 0,$$

oder $$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{q}{2}\left(\frac{x_4 + x_3}{H}\right) + \operatorname{tg}\alpha_0$$

$$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{q}{2}\left(\frac{x_4 + x_3}{H}\right) + \operatorname{tg}\alpha_0$$

$$y_4 - y_3 = \frac{q}{2}\left(\frac{x_4^2 - x_3^2}{H}\right) + (x_4 - x_3)\operatorname{tg}\alpha_0.$$

Analog $$y_3 - y_2 = \frac{q}{2}\left(\frac{x_3^2 - x_2^2}{H}\right) + (x_3 - x_2)\operatorname{tg}\alpha_0$$

$$y_2 - y_1 = \frac{q}{2}\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{H}\right) + (x_2 - x_1)\operatorname{tg}\alpha_0$$

---

addiert: $$y_4 - y_1 = \frac{q}{2}\left(\frac{x_4^2 - x_1^2}{H}\right) + (x_4 - x_1)\operatorname{tg}\alpha_0$$

Nimmt man $(x_1 y_1)$ als gegeben, $(x_4 y_4)$ als laufenden Koordinaten (xy) einer durch die Knotenpunkte gezogenen stetigen Kurve, so ist demnach deren Gleichung

$$1) \qquad y = y_1 + \frac{q}{2}\left(\frac{x^2 - x_1^2}{H}\right) + (x - x_1)\,\mathrm{tg}\,\alpha_0$$

und die Kurve der Knotenpunkte erweist sich als eine durch $(x_1 y_1)$ gehende Parabel (Gleichgewichtsform des Sprengwerkes).

Bei sehr großer Anzahl von Stäben mit sehr kleiner Länge wird das Sprengwerk zum parabolischen Gewölbe. Letzteres kann daher näherungsweise als Gleichgewichtsform bei belastenden Aufschüttungen angesehen werden, deren Höhe sehr groß ist im Verhältnis zum Gewölbepfeil.

§ 14. Gleichgewichtsform eines Sprengwerks bei nicht gesetzmäßiger Knotenpunktsbelastung.

Nach Bd. I, § 15, I ist die Gleichgewichtsform ein durch die Auflagerpunkte gehendes Seilpolygon für die gegebenen P. Es gibt also unendlich viele Gleichgewichtsformen, die durch die Auflagerpunkte A_1 und A_2 gehen. (Über die Konstruktion eines Seilpolygons durch zwei gegebene Punkte vergl. Statik Bd. I, § 15, IV.) Die Gleichgewichtsform wird erst dann eine bestimmte, wenn noch ein dritter Punkt C des Polygons gegeben ist. (Über die Konstruktion eines Seilpolygons durch drei gegebene Punkte, vergl. Bd. I, § 15, VI.)

Die Aufgabe der Konstruktion eines Seilpolygons, das durch die drei gegebenen Punkte A_1, A_2 und C geht, läßt sich auch dadurch lösen (Fig. 29a und b), daß man für die gegebenen P ein beliebiges Seil*polygon (I)* durch die beiden Auflagerpunkte A_1 und A_2

konstruiert (Bd. I, § 15, IV). Die Polarachse aller durch A_1 und A_2 gehenden Seilpolygone ist A_1 A_2. Bringt man daher (vergl. Statik Bd. I, § 15, III) die Seiten des konstruierten Polygons (I) zum Schnitt mit der Polarachse (Fig. 29a) in D, E, F, G, so läßt sich leicht das gesuchte (II) aus dem konstruierten (I) mit Hilfe dieser Schnittpunkte ableiten (Statik Bd. I, § 15, III), indem man zuerst durch Verbindung von C mit dem entsprechenden Schnittpunkt D der Seite 3 von I mit der Polarachse die durch C gehende Seite desselben findet.

Fig. 29b.

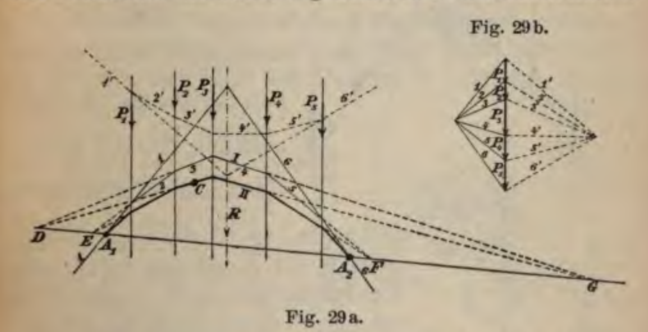


Fig. 29a.

Bei **symmetrischem** und **symmetrisch belastetem Sprengwerk** läßt sich bei gegebenen Scheitel- und Auflagerpunkten C, A_1 und A_2 die Gleichgewichtsform des halben Sprengwerks einfacher wie folgt konstruieren:

I. Fall. C ein Knotenpunkt. (Fig. 30a und b.)

Die in C angreifende P_4 sei zu gleichen Teilen auf die beiden anstoßenden Stäbe verteilt (§ 1, IVa u. Anm.). Man schneide in C das Sprengwerk durch und ersetze an der linken Hälfte die Wirkung der rechtsseitigen durch H und V.

desgleichen das linksseitige Auflager durch H_1 und V_1, dann folgt aus dem Gleichgewicht des ganzen Sprengwerks:

$$2V_1 - 2P_0 - 2P_1 - 2P_2 - 2P_3 - P_4 = 0$$

und aus demjenigen der linken Hälfte

$$V_1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - \frac{P_4}{2} + V = 0,$$

Fig. 30 a.

woraus aus beiden Gleichungen

$$V = 0$$

sich ergibt. In C wirken also nur H und $\frac{P_4}{2}$. Setzt man nun P_0, P_1, P_2, P_3, $\frac{P_4}{2}$ zu einer Resultanten R zusammen, so ist diese im Gleichgewicht mit H und dem resultierenden Auflagerdruck W_1. Die Richtungslinien dieser drei Kräfte müssen sich daher (Statik Bd. I, § 13) in einem Punkte T schneiden, der als Schnitt der Wirkungslinien von H

Fig. 30 b.

und R bestimmt ist. TA_1 gibt die Wirkungslinie von W_1. Ein über $MN = R$ nach den Wirkungslinien von H und W_1 konstruiertes Kräftedreieck MNO (Fig. 30b) liefert $OM = H$ und $NO = W_1$.

Ist nun $MD = \frac{P_4}{2}$, so ist OD die Resultante von H und $\frac{P_4}{2}$, daher bei Gleichgewicht (§ 1, II) Stab IV

parallel OD. Ferner muß bei Gleichgewicht der Stab I in die Wirkungslinie der Resultanten von W_1 und P_0 fallen. Letztere ist aber durch die Strecke GO vorgestellt, somit muß Stab I parallel GO sein. Daher muß O der Pol des gesuchten Seilpolygons sein, das sich somit, wenn $DE = P_3$, $EF = P_2$ usf. gemacht wird, durch Parallelen zu OE, OF usf. leicht konstruieren läßt.

II. Fall. C im Mittelpunkt eines horizontalen Scheitelstabes. (Fig. 31a und b.)

Aus dem Gleichgewicht der durch Durchschneiden in C hergestellten linksseitigen Hälfte läßt sich wieder H und W_1 mit Hilfe des Punktes T und des Kräftedreiecks MNO wie oben ermitteln. Da wieder der Stab I in die Wirkungslinie der Resultanten von W_1 und P_0 fällt, also parallel GO sein muß, ferner der Scheitelstab parallel $OM = H$ ist, so ist wieder die Ecke O des Kräftedreiecks MNO der Pol des Seilpolygons, daß sich analog wie oben aufzeichnen läßt durch Parallelen zu den Polstrahlen OE, OF usf.

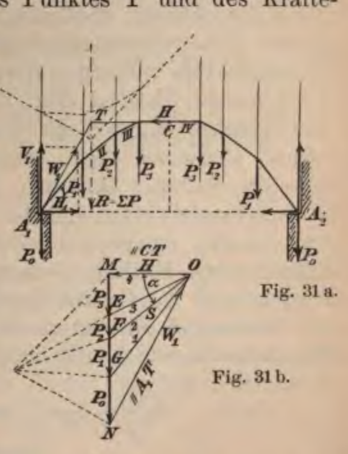


Fig. 31 a.

Fig. 31 b.

Anmerkung. In beiden Fällen geben die von O ausgehenden Polstrahlen OD, OE usf. die Größe der in den einzelnen Stäben herrschenden Druckkräfte S an (wie sich aus der Betrachtung des Gleichgewichts

zustandes jedes Knotenpunktes ergibt). Ist H die Größe des Horizontalschubs MO und α die Horizontalneigung eines Stabes, so ist, wie aus den Fig. 30b und 31b ersichtlich, die in jenem Stab herrschende Druckspannung

$$S = \frac{H}{\cos \alpha}.$$

§ 15. Beispiel der Berechnung eines symmetrischen beliebig geformten Sprengwerks von symmetrischer Knotenpunktsbelastung.

Weicht die Gestalt eines Sprengwerks von der Gleichgewichtsform (Seilpolygon) ab, so ist durch geeignete Konstruktionsmittel für Aufhebung des in den Knotenpunkten wirkenden Horizontalschubs H zu sorgen. Im folgenden Beispiel (Fig. 32a und b), welchem ein quadratisches Kuppeldach von gegebenem Diagonalschnitt zugrunde liegt, dessen Diagonalebenen die Sprengwerksträger enthalten, ist dies durch Verbinden je zweier aufeinanderfolgender, in gleicher Höhe liegender, einander entsprechender Knotenpunkte der beiden Träger durch horizontale Zugstangen zu geschlossenen Pfettenringen (in Gr-Riß Quadrate) bewerkstelligt.

Belastung 150 kg/qm Horizontal-Projektion.

Belastung einer Seitenfläche des Daches

$$\frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 150 = 2700 \text{ kg},$$

hiervon entfällt auf

$$\text{Teil CEE}' \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot 150 = 75 \text{ kg},$$

$$\text{Teil } CDD' \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 150 = 675 \text{ kg},$$

$$\text{Teil } CBB' \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot 150 = 1875 \text{ kg},$$

somit auf Dachteil α: 75 kg,

Dachteil β: $675 - 75 = 600$ kg,

Dachteil γ: $1875 - 675 = 1200$ kg,

Dachteil δ: $2700 - 1875 = 825$ kg,

daher auf Knotenpunkt

$$E \quad 2\left(\frac{75}{2} + \frac{600}{4}\right) = 375 \text{ kg } (P_1),$$

$$D \quad 2\left(\frac{600}{4} + \frac{1200}{4}\right) = 900 \text{ kg } (P_2),$$

$$B \quad 2\left(\frac{1200}{4} + \frac{825}{4}\right) = 1012{,}5 \text{ kg } (P_3),$$

$$A_1 \quad 2 \cdot \frac{825}{4} = 412{,}5 \text{ kg } (P_4).$$

Man entferne an einem der Träger die seitlichen Zugstangen (Pfetten) und ersetze ihre Wirkung je durch eine in die Trägerebene fallende horizontale Resultante H_1 bezw. H', H'', H''', desgl. die Wirkung des Auflagers durch V_1, so ist V_1 mit sämtlichen P und H der linken Trägerhälfte im Gleichgewicht. Daher

I. Trägerhälfte als Ganzes:

$\Sigma Y = 0$:

$V_1 - (375 + 900 + 1012{,}5 + 412{,}5) = 0$; $\underline{V_1 = 2700 \text{ kg.}}$

II. Freimachung von Stab $A_1 B$: (Fig. 32c). In B sei die Last P_3 ganz diesem Stab zugeteilt. Statt des folgenden

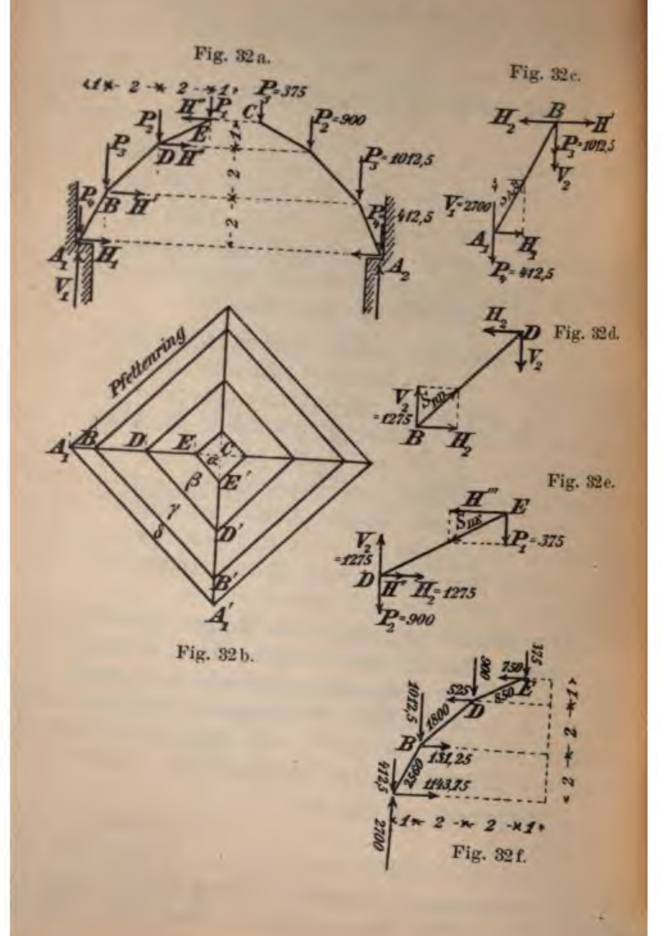


Fig. 32 a.

Fig. 32 b.

Fig. 32 c.

Fig. 32 d.

Fig. 32 e.

Fig. 32 f.

Stabes BD greifen in B H_2 und V_2 an; außerdem sei H' ganz dem Stab A_1B zugeteilt (§ 1, IVa).

$\Sigma X = 0$:

1) $$H_1 - H_2 + H' = 0.$$

$\Sigma Y = 0$:

2) $$-2700 + V_2 + 1012{,}5 + 412{,}5 = 0,$$
$$\underline{V_2 = 1275 \text{ kg}}.$$

Σ-Momente um $B = 0$:

3) $$(2700 - 412{,}5)1 - H_1 \cdot 2 = 0; \quad \underline{H_1 = 1143{,}75 \text{ kg}}$$

somit

Druckkraft $\underline{S_{A_1 B}}$ im Stab $A_1B = \sqrt{(V_1 - P_4)^2 + H_1^2} = \underline{2560 \text{ kg}}.$

III. Desgl. von Stab BD: (Fig. 32d). In B sind die entgegengesetzten Kräfte H_2, V_2 anzubringen (§ 1, III), ebenso in D gewisse Kräfte. Werden die Kräfte P_2 und H'' nicht als am Stab BD, sondern als am Stab DE angreifend gedacht, so läßt sich die Wirkung des wegzunehmenden Stabes DE durch eine Kraft ersetzen, die bei Gleichgewicht von BD nur in der Richtung dieses Stabes liegen kann und der in B angreifenden Kraft S_{BD} gleich und entgegengesetzt sein muß (§ 1, II). Daher sind ihre Komponenten gleich und entgegengesetzt H_2 bezw. V_2 zu nehmen. Wählt man jedoch D zum Momentenpunkt, so ist deren Moment je $= 0$ und die Momentengleichung liefert:

Σ-Momente um $D = 0$:

$$-H_2 \cdot 2 + 1275 \cdot 2 = 0; \quad \underline{H_2} = \underline{1275 \text{ kg}},$$

daher

$$\underline{S_{BD}} = \sqrt{H_2^2 + V_2^2} = \underline{1800 \text{ kg}} \text{ (Druck)}.$$

Ferner liefert Gleichung II, 1):

$$1143{,}75 - 1275 + H' = 0; \quad \underline{H' = 131{,}25 \text{ kg}}.$$

IV. Desgl. von Stab DE: (Fig. 32e). In D ist die Wirkung des Stabes BD (S_{BD}) durch deren nach oben und rechts gerichteten Komponenten H_2 und V_2 ersetzt. Außerdem teile

gemäß III die Kräfte H'' und P_2 ganz dem Stab DE zu, ebenso die in E angreifenden P_1 und H'''. Aus dem Gleichgewicht des Stabes folgt:

Σ-Momente um $D = 0$:

1) $$375 \cdot 2 - H''' \cdot 1 = 0; \quad \underline{H''' = 750 \text{ kg.}}$$

$\Sigma X = 0$:

2) $$1275 + H'' - 750 = 0,$$
$$\underline{H'' = -525 \text{ kg.}}$$

H'' ist negativ gefunden, wirkt also dem angenommenen Sinn der Figur entgegen, also nach außen.

Ferner $\underline{S_{DE}} = \sqrt{(H''')^2 + P_1^2} = \underline{850 \text{ kg}}$ (Druck).

Probe (Fig. 32f):

Gleichgewicht der ganzen Trägerhälfte unter Einfluß von V_1 und sämtlicher P und H. Diese Kräfte seien nach Maßgabe obiger Resultate angebracht:

$$\Sigma X = 0: \quad H_1 + H' - H'' - H''' = 0;$$
$$1143{,}75 + 131{,}25 - 525 - 750 \equiv 0.$$

$$\Sigma Y = 0: \quad -V_1 + P_4 + P_3 + P_2 + P_1 = 0;$$
$$-2700 + 412{,}5 + 1012{,}5 + 900 + 375 \equiv 0.$$

Σ-Momente um $A_1 = 0$:

$$P_3 \cdot 1 + P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 5 + H' \cdot 2 - H'' \cdot 4 - H''' \cdot 5 = 0;$$
$$1012{,}5 \cdot 1 + 900 \cdot 3 + 375 \cdot 5 + 131{,}25 \cdot 2 - 525 \cdot 4 - 750 \cdot 5 \equiv 0.$$

B) Hängwerke.

§ 16. Gleichgewichtsform und Berechnung der Hängwerke.

Dreht man in einem unter Einfluß vertikaler nach unten gerichteter Lasten im Gleichgewicht sich befindlichen Sprengwerk den Sinn der Lasten bei *unveränderter* Größe und Wirkungslinien derselben um,

so bleibt ein Gleichgewichtszustand desselben erhalten, jedoch so, daß sämtliche Stabkräfte, sowie die Auflager die entgegengesetzte Beanspruchung erleiden. Dreht man diesen zweiten, nach unten konkaven Träger, samt allen angreifenden aktiven Kräften um irgend eine in seiner Ebene gelegene horizontale Gerade aus seiner Ebene heraus, jedoch so, daß Träger und Kräfte stets in derselben Ebene bleiben und ihre gegenseitige Lage nicht verändern, so bleibt für jede neue Lage der Ebene das Gleichgewicht ungestört. Erfolgt eine Drehung um 180°, so daß die Trägerebene wieder mit der ursprünglichen zusammenfällt, so bildet die Konstruktion ein Hängwerk.

Durch diese Drehung (Fig. 33) werden die Lasten wieder vertikal nach unten, somit die vertikalen Komponenten der Auflagerdrücke wieder nach oben gerichtet. Die Horizontalkomponenten derselben bleiben jedoch nach außen gerichtet und die in den Stäben tätigen Kräfte sind Zugkräfte.

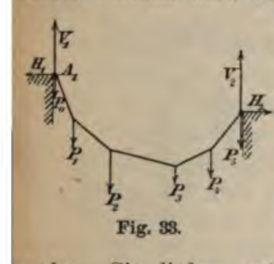


Fig. 33.

Für die Hängwerke gelten daher die analogen Betrachtungen wie für die Sprengwerke. Sie liefern entsprechend dem § 13:

Die Gleichgewichtsform eines Hängwerkes mit stetiger, gleichförmig auf dessen Horizontalprojektion verteilter Belastung, die in den Knotenpunkten mittelst Zugstangen angreift, ist eine Parabel.

Bei einer sehr großen Anzahl von Stäben von sehr kleiner Länge geht das Hängewerk über in die Trägerform einer Kette (Hängebrücke). Bei gleich-

förmig und stetig über deren Horizontalprojektion verteilter Belastung ist daher deren Gleichgewichtsform eine Parabel.

Ist das Hängwerk sehr flach, so daß die Stablängen nahezu gleich ihrer Projektion betrachtet werden können, und befindet sich dasselbe nur unter Einfluß seines Eigengewichts, dessen Wert pro Längeneinheit überall konstant ist, so nähert sich die Parabel der Gleichgewichtsform eines schweren überall gleich dicken homogenen Seiles (Kettenlinie. Seilkurve, vergl. § 41).

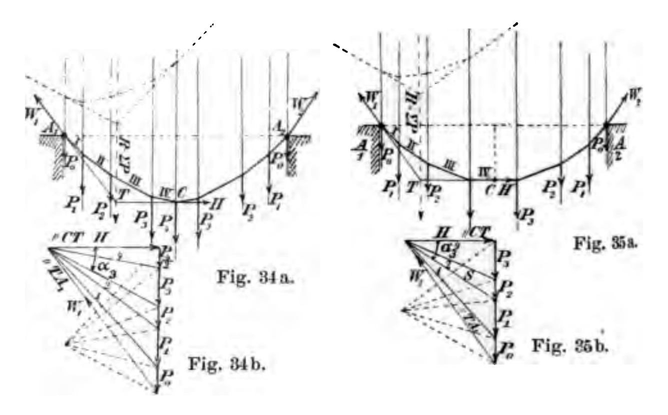


Fig. 34a. Fig. 34b. Fig. 35a. Fig. 35b.

Die Gleichgewichtsform eines Hängwerkes für nicht gesetzmäßige Knotenpunktsbelastung ist ein durch die beiden Aufhängepunkte gehendes Seilpolygon.

Die Konstruktion desselben geschieht analog der entsprechenden Konstruktion des § 14.

Die nebenstehend gezeichneten Figuren 34a und b und 35a und b geben die den Konstruktionen

des § 14 analogen Konstruktionen der Gleichgewichtsform eines symmetrischen und symmetrisch belasteten Hängwerkes an und zwar für die Fälle:

1. im Scheitel ein Knotenpunkt (Fig. 34a und b),
2. „ „ ein horizontaler Stab (Fig 35a und b).

Anmerkung. Die Polstrahlen stellen wieder die Größe der in den bezüglichen Stäben herrschenden Zugkräfte S vor; $S = \frac{H}{\cos \alpha}$ (H Horizontalzug und α Horizontalneigung des betreffenden Stabes).

IV. Kapitel.

Standfestigkeit der Mauern (Pfeiler).

§ 17. Bedingungen der Standfestigkeit.

Eine Mauer (Pfeiler) steht außer ihrem Eigengewicht stets unter Einfluß weiterer äußerer (aktiver und passiver) Kräfte (Druck hinterfüllter Erde, Wasserdruck, Winddruck, ferner der Widerstandskräfte des Bodens usf.) Wir setzen hier stets nur Mauern voraus, deren Grundriß der Länge nach durch vertikale zur Längsrichtung senkrechte Querebenen so geteilt werden kann, daß sämtliche an dem zwischen zwei solchen Querebenen liegenden Mauerstück angreifende äußere Kräfte in einer einzigen, zur Längsrichtung ebenfalls normalen Vertikalebene (Kraftebene) liegen.

Bei Mauern von gleichbleibendem Profil (Fig. 36a), wie wir sie im folgenden stets voraussetzen, schneiden wir ein Stück von der Länge (Tiefe) = 1 m heraus, dann sei die den vertikalen Begrenzungsflächen OT und ML parallele vertikale Mittelebene UV die Kraftebene

Es sei MLOT (Fig. 36a) die Bodenfuge eines solchen Mauerstückes von der Länge = 1 m, in dessen Mittelebene U V die aktiven Kräfte P_1, P_2 usf. und die Gewichte Q_1 usf. angreifen. Man betrachte den über einer beliebigen Lagerfuge A″B″ stehenden Teil A″B″C″D″ dieses Mauerstückes, so wirken an ihm außer den auf

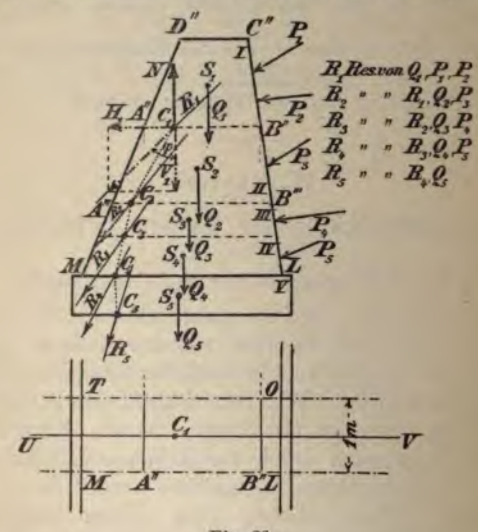


Fig. 36a.

ihn entfallenden Kräften P, z. B. P_1 und P_2, noch das in seinem Schwerpunkt S_1 angreifende Gewicht Q_1 desselben, außerdem die Widerstandskräfte der Unterlage A″B″. Da wir dem Mörtel keine Zugfestigkeit zuschreiben, so können deren Vertikalkomponenten nur nach oben gerichtete Druckkräfte sein. Diese Widerstandskräfte müssen *mit Q_1, P_1* und P_2 im Gleichgewicht sein.

Die gegebenen Kräfte P_1 und P_2 lassen sich mit Q_1 entweder auf eine Einzelkraft R_1 oder auf ein Kräftepaar zurückführen. Im letzteren Fall wäre aber Gleichgewicht nur dann, wenn die Widerstandskräfte der Unterlage $A''B''$ ebenfalls auf ein Kräftepaar derselben oder einer parallelen Ebene von gleichem aber entgegengesetztem Moment zurückgeführt werden könnten. Dies ist aber nach der oben gemachten Voraussetzung über die Art der Vertikalkomponenten der Widerstandskräfte, die stets eine nach oben gerichtete vertikale Resultante liefern, unmöglich, daher muß bei Gleichgewicht Q_1, P_1 und P_2 stets eine Resultante R_1 liefern.

Nach Statik Bd. I § 49 ergibt sich, daß ein Kippen des betrachteten Mauerstückes um eine der durch A'' bezw. B'' gehenden horizontalen Längskanten nicht stattfindet, wenn der Schnittpunkt C_1 der Wirkungslinie von R_1 mit der Fuge $A''B''$ innerhalb der Fugenbreite $A''B''$ liegt. Verschiebt man für diesen Fall R_1 mit ihrem Angriffspunkt nach C_1 und zerlegt sie dort in die Komponenten H_1 und V_1, so wird bei Gleichgewicht V_1 durch die Resultante N der Normalkomponenten der Widerstandskräfte und H_1 durch die Resultante von deren Komponenten nach der Fugenfläche aufgehoben. Die letztere Bedingung wird aber nur erfüllt, wenn $H_1 \leqq$ dem Grenzwert des einer Verschiebung des Mauerstückes auf seiner Unterlage $A''B''$ widerstehenden Reibungswiderstandes derselben ist. Daher:

Das (als starrer Körper gedachte) Mauerstück $A''B''C''D''$ ist statisch im Gleichgewicht, wenn

1. der Punkt C_1 innerhalb der Fugenbreite liegt;
2. der Winkel der Richtungslinie von R_1 mit der Normalen zur Fugenfläche $\leqq$ Reibungswinkel φ ist (Statik Bd. I § 50).

In der Festigkeitslehre (Elastizitätslehre) wird jedoch gezeigt, daß die Voraussetzung durchgehends nach oben gerichteter Vertikalkomponenten der Widerstandskräfte (Druckwiderstände) für sämtliche Elemente der Fugenfläche $A''B''$ nur dann erfüllt wird, wenn C_1 innerhalb gewisser Grenzen zwischen A'' und B'' liegt. Bei einer durchgehends prismatischen Mauer von konstantem Profil darf C_1 aus diesen Gründen nicht innerhalb eines der beiden äußeren Drittel der Fugenbreite $A''B''$ liegen. Liegt nämlich C_1 innerhalb eines der beiden äußeren Drittel der Fugenbreite, so tritt an dem dem Punkte C_1 abgewandten Ende der Fuge Zugspannung, also ein Klaffen der Fuge ein. Außerdem darf die größte Inanspruchnahme des Mauerwerkes in jener Fuge, die mit zunehmender Annäherung des Punktes C_1 an A'' bezw. B'' zunimmt (vergl. Bändchen Festigkeitslehre), die zulässige nicht überschreiten.

Da diese Bedingungen für jede Fuge $A''B''$ gelten, so ergeben sich als Bedingungen der Standfestigkeit der Mauer:

1. Die Resultante R sämtlicher äußerer (aktiver) Kräfte (einschl. Eigengewicht), welche an dem über einer beliebigen Lagerfuge stehenden Mauerteil angreifen, muß diese Fuge innerhalb des Mauerprofils treffen.

2. Die Wirkungslinie dieser Resultanten darf von der Normalen zur Fugenfläche um keinen größeren Winkel als den Reibungswinkel φ (gewöhnlich zu 30^0 genommen) abweichen.

3. Der Treffpunkt der Resultanten mit der Fugenfläche darf dem Mauerprofil nicht *zu nahe kommen* (vergl. Festigkeitslehre). Für

durchgehends prismatische Mauern von konstantem Mauerprofil darf er nicht innerhalb eines der beiderseitigen äußeren Drittel der Fugenbreite liegen (vergl. Festigkeitslehre).

4. Die Inanspruchnahme des Mauerwerkes darf an keiner Stelle der Mauer die zulässige überschreiten.

Die Untersuchung einer Mauer hinsichtlich der Erfüllung der Bedingungen 1 bis 3 wird am einfachsten auf graphischen Wege (vergl. § 18) durchgeführt; diejenige bezüglich der Bedingung 4. ist Aufgabe der Festigkeitslehre und kann hier nicht weiter behandelt werden.

§ 18. **Stützlinie.**

Man nennt (Fig. 36a) C_1 den Stützpunkt der Lagerfuge $A''B''$. Es sei $A'''B'''$ eine benachbarte tiefer gelegene Fuge. An dem zwischen beiden Fugen gelegenen Mauerteil II greifen in seinem Schwerpunkt S_2 sein Eigengewicht Q_2, in C_1 die vorher gefundene Resultante R_1, und am Profil weitere Kräfte P, z. B. P_3, an. Setzt man Q_2, R_1 und P_3 zu einer neuen Resultanten R_2 zusammen, so liefert diese auf $A'''B'''$ den neuen Stützpunkt C_2. Fährt man auf diese Weise fort, indem man nach unten vorwärtsschreitend die Mauer durch weitere Fugen in die aufeinanderfolgenden Teile III, IV, V usf. zerlegt, für jeden derselben die Resultante seines Eigengewichts, der vorhergehenden Resultanten R und der an ihm angreifenden P konstruiert, so erhält man für jede dieser Fugen den Stützpunkt C. Die Verbindung dieser sämtlichen Stützpunkte C durch einen gebrochenen polygonalen Zug liefert die Stützlinie der Mauer (in Figur punktiert).

Die Seiten dieses Zuges stimmen nicht überein mit den Wirkungslinien der betreffenden Resultanten; die Stützlinie gibt also nicht die Richtungslinie der Fortpflanzung des Druckes von einer Fuge zur anderen an. Sie hat nur den Zweck, diejenigen Fugen, in denen die größte Annäherung der Stützpunkte an das Mauerprofil stattfindet — Bruchfugen — rasch erkennen zu lassen. In letzteren findet die größte Inanspruchnahme des Materials statt.

Die Bedingnngen 1. und 3. für die Standfestigkeit einer Mauer sind demnach erfüllt, wenn die Stützlinie an keiner Stelle außerhalb des Mauerprofiles tritt und auch in diesem Fall dem Profil nirgends zu nahe kommt. Bei prismatischen Mauern von konstantem Profil darf sie an keiner Stelle innerhalb eines der beiden äußeren Drittel der Fugenbreite treten.

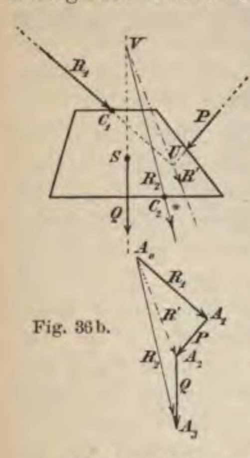


Fig. 36b.

Anmerkung. Die Zusammensetzung der an einem der Mauerteile wirkenden Kräfte zu einer Resultanten R geschieht allgemein mit Kräfte- und Seilpolygon. Wirken jedoch an einem Mauerteile außer seinem Eigengewicht Q nur noch zwei Kräfte, z. B. R_1 und P, so läßt sich die Resultante R_2 von Q, R_1 und P zweckmäßig folgendermaßen konstruieren (Fig. 36b):

Konstruiere aus R_1 und P das Kräftepolygon A_0 A_1 A_2 so ist $A_0 A_2$ deren Resultante R' nach Größe,

Richtung und Sinn und die durch den Schnittpunkt U der Wirkungslinien von R_1 und P zu $A_0 A_2$ gezogene Parallele deren Wirkungslinie. Um nun R′ und Q zu einer Resultanten R_2 zusammenzusetzen, füge man im Kräftepolygon im Sinne der folgenden Pfeile $A_2 A_3 = Q$ an, so ist $A_0 A_3$ die Resultante R_2 der drei Kräfte und die durch den Schnittpunkt V der Wirkungslinien von Q und R′ zu $A_0 A_3$ gezogene Parallele die gesuchte Wirkungslinie der R_2.

§ 19. Beispiel für die graphische Konstruktion der Stützlinie an dem in Fig. 37a dargestellten Pfeiler von 1 m Länge (Tiefe) und konstantem Profil.

Gegeben die äußeren (aktiven) Kräfte: $P_1 = 3000$ kg
$P_2 = 1200$ kg
$P_3 = 9000$ kg,
ferner das Gewicht von 1 cbm Mauerwerk = 2000 kg.

Der Pfeiler sei durch geeignete Horizontalfugen in die Teile I, II, III, ... VIII zerlegt, deren in den eigenen Schwerpunkten angreifende Gewichte zu

$$Q_1 = 1 \cdot 1{,}2 \cdot 1 \cdot 2000 = 2400 \text{ kg}$$
$$Q_2 = 1 \cdot 1{,}2 \cdot 1 \cdot 2000 = 2400 \text{ kg}$$
$$Q_3 = 1 \cdot 1{,}2 \cdot 1 \cdot 2000 = 2400 \text{ kg}$$
$$Q_4 = \frac{2 + 1{,}2}{2} \cdot 1 \cdot 2000 = 3200 \text{ kg}$$
$$Q_5 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2000 = 4000 \text{ kg}$$
$$Q_6 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2000 = 4000 \text{ kg}$$
$$Q_7 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2000 = 4000 \text{ kg}$$
$$Q_8 = 2{,}4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2000 = 4800 \text{ kg}$$

bestimmt seien. Die Schwerpunkte S liegen in der Kraftebene (Mittelebene) und sind zugleich die Schwerpunkte der ebenen Teilflächen I, II usf., als we

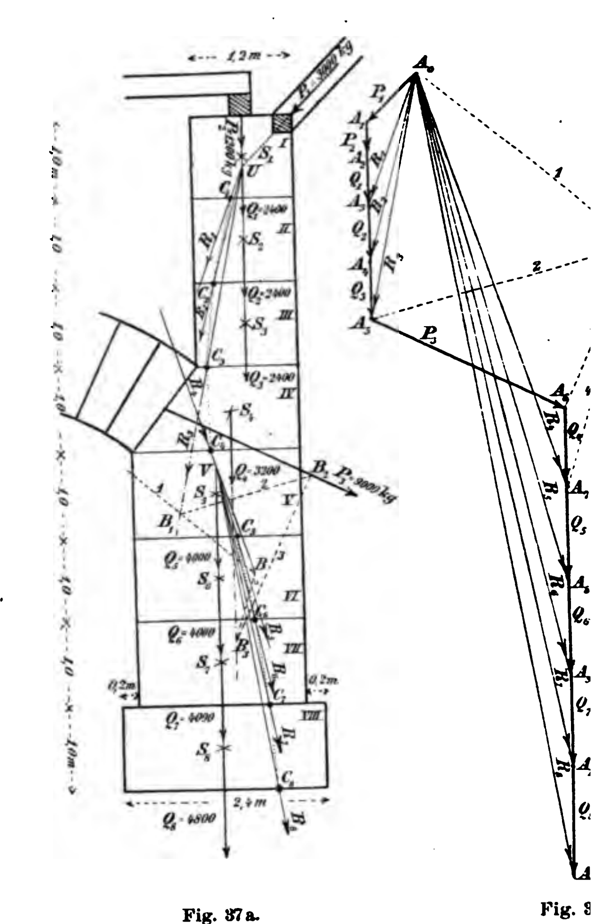


Fig. 37 a.

Fig. 3

sie bestimmt werden (graphisch; Schwerpunkt eines Trapezes (IV) (vergl. Statik Bd. I § 42).

Die Resultante R_1 (Fig. 37a) der am Teil I wirkenden Kräfte P_1, P_2, Q_1 ergibt sich durch das Kräftepolygon (vergl. Statik Bd. I § 11) $A_0 A_1 A_2 A_3$ in der Strecke $A_0 A_3$ und ihre Wirkungslinie im allgemeinen mittelst Seilpolygon (Bd. I § 11), die Resultante R_2 der an II angreifenden Kräfte R_1 und Q_2 mittelst Kräftepolygons $A_0 A_3 A_4$ und Seilpolgons usf., die Resultante R_4 der an IV angreifenden Kräfte R_3, P_3, Q_4 mittelst Kräftepolygons $A_0 A_5 A_6 A_7$ und Seilpolygon u. s. f. Die Resultanten bilden im Kräftepolygon ein System von A_0 ausgehender Strahlen.

Im gegebenen Beispiel vereinfacht sich die Konstruktion der Wirkungslinie von R_1 jedoch dadurch, daß P_2 und Q_1 in derselben Wirkungslinie liegen, somit R_1 durch den Schnittpunkt U derselben mit der Wirkungslinie von P_1 gehen muß. Eine Parallele durch U zu $A_0 A_3$ liefert demnach die Wirkungslinie von R_1.

Die Resultante R_2 von R_1 und Q_2 geht durch den Schnittpunkt dieser Kräfte, also ebenfalls durch U, ebenso geht aus gleichen Gründen R_3 durch U. Die Wirkungslinien von R_2 und R_3 sind also die durch U zu $A_0 A_4$ und $A_0 A_5$ gezogenen Parallelen.

Die Resultante R_4 der am Teil IV angreifenden Kräfte R_3, Q_4, P_3 ist in Figur mittelst Kräftepolygons $A_0 A_5 A_6 A_7$ und zugehörigen Seilpolygons $B_1 B_2 B_3$ (mit beliebigen Pol 0) konstruiert, dessen erste und letzte Seite sich in B schneiden. Durch B die Parallele zu $A_0 A_7$ ist die Wirkungslinie von R_4.

Die Resultante R_5 von R_4 und Q_5 geht durch den Schnittpunkt V dieser Kräfte, ebenso gehen aus gleichen Gründen die folgenden Resultanten R_6, V



R_8 je durch denselben Punkt V. Die Parallelen durch V zu den Strahlen $A_0 A_8$, $A_0 A_9$, $A_0 A_{10}$, $A_0 A_{11}$ sind die Wirkungslinien von R_5, R_6, R_7, R_8.

Durch die Wirkungslinien der Kräfte R ist auf jeder Fuge ihr zugehöriger Stützpunkt C und durch die Verbindung sämtlicher Stützpunkte bis zur Fundamentsohle die Stützlinie konstruiert.

§ 20. Analytische Bestimmung der Stützlinie.

In Statik Bd. I, § 19 Beispiel ist gezeigt worden, wie sich der Stützpunkt der Bodenfuge rechnerisch finden läßt.

Dasselbe Verfahren läßt sich für jede beliebige Fuge A″B″ anwenden, wofern man nur den über dieser Fuge stehenden Mauerteil A″B″C″D″ (Fig. 36a) und die an diesem angreifenden aktiven Kräfte in Betracht zieht und auf diese das dort angegebene Verfahren überträgt.

Anmerkung. In vielen Fällen genügt jedoch die Bestimmung des Stützpunktes der Bodenfuge und der Fundamentsohle zum Zweck der Ermittlung der größten Inanspruchnahme des Mauerwerkes und des größten vom Terrain aufzunehmenden Druckes in der Fundamentsohle (vergl. Bd. Festigkeitslehre).

V. Kapitel.

Standfestigkeit der symmetrischen Tonnengewölbe.

§ 21. Statische Unbestimmtheit bezw. Bestimmtheit der Drücke in Kämpfer- und Scheitelfuge.

In einem zur vertikalen Scheitelebene des Profils symmetrischen Tonnengewölbe (Teil eines Kreiszylinders mit horizontaler Achse) sei durch zwei vertikale, zur Gewölbeachse senkrechte Ebenen ein Stück von 1 m Länge (Tiefe) ausgeschnitten. Die Belastung sei der Länge des Gewölbes nach gleichförmig, so daß sie sich für jeden von zwei Fugenebenen begrenzten Teil des ausgeschnittenen Stückes des Gewölbes von der Länge (Tiefe) = 1 m durch eine in der Mittelebene desselben liegende Resultante ersetzen läßt. Diese Mittelebene wird dann zur Kraftebene, in der auch die Widerstandskräfte der Kämpfer und der Scheiteldruck liegen.

Nach Ersatz der Auflager durch die Kämpferdrücke W_1 und W_2 sind W_1 und W_2 und die Resultante R aller Lasten P, die am Gewölbestück von der Länge = 1 m angreifen, im Gleichgewicht. Ihre Wirkungslinien (Fig. 38a) schneiden sich (Statik Bd. I § 13) daher in einem Punkte S und W_1 und W_2 bilden über R ($= \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2$) ein Kräftedreieck ($\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2$ O) nach den Richtungen SA_1 und SA_2 (Fig. 38b).

Die Bestimmung von W_1 und W_2 aus diesem Dreieck ist aber unmöglich, da die drei Punkte S, A_1 und A_2 unbekannt sind.

Es sei EF (Fig. 38a) eine beliebige Fuge und das Gewölbe in ihr durchgeschnitten. Dann bleibt der linksseitige Gewölbeteil im Gleichgewicht, wenn man an ihm in einem gewissen Punkte C der durchgeschnittenen Fuge den Fugendruck s anbringt. Setzt man die am linksseitigen Gewölbeteil angreifenden P zu einer Resultanten R_1 zusammen, so ist auch W_1, s und R_1 im Gleichgewicht. Ihre Wirkungslinien schneiden sich daher in einem Punkte T_1. Analog ergibt sich das Gleichgewicht des rechtsseitigen Trägerteiles, wenn man an ihm nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung in demselben Punkte C den entgegengesetzten Fugendruck — s anbringt. Da — s, W_2 und R_2 (Resultante der am rechtsseitigen Gewölbeteil angreifenden P) im Gleichgewicht sind, so schneiden sich auch die Wirkungslinien dieser drei Kräfte in einem Punkte T_2.

Fig. 38a.

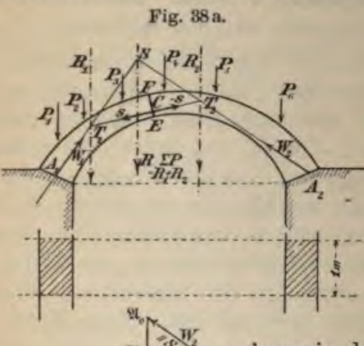


Fig. 38b.

Wäre nun Punkt C und die Wirkungslinie von s gegeben, so wären hierdurch die Punkte T_1 und T_2 bestimmt. Wäre ferner Punkt A_1 bekannt, so wäre durch $A_1 T_1$ der Punkt S und mittelst ST_2 der Punkt A_2, also nach obigem die Kämpferdrücke W_1 und W_2 konstruierbar (mittelst des über $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2 = R$ nach den Richtungen von W_1 und W_2 konstruierten Kräftedreiecks $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2 O$). Daher:

W$_1$ und W$_2$ sind bei gegebener Belastung bestimmt, wenn für irgend eine Fuge EF der Angriffspunkt C und die Wirkungslinie des Fugendruckes s und der Angriffspunkt A$_1$ einer der Kämpferdrücke gegeben sind.

Macht man im Kräftedreieck $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2$ O (Fig. 38b) die Strecke $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = R_1$, so ist demnach O $\mathfrak{A}_1 = s$. Es ist somit der Zug A$_2$ T$_2$ T$_1$ A$_1$ (Fig. 38a) ein zu den Belastungen R$_2$ und R$_1$ gehöriges Seilpolygon (Pol O). Nach Statik Bd. I, § 15, VI ist aber ein Seilpolygon ein ganz bestimmtes, wenn es durch drei gegebene Punkte geht, daher ist durch die drei Punkte A$_1$, C, A$_2$ das genannte Seilpolygon bestimmt, somit auch durch die Richtungen seiner äußersten Seiten die Kräfte W$_1$ und W$_2$. Daher auch:

W$_1$ und W$_2$ sind bei gegebener Belastung bestimmt, wenn die Angriffspunkte der Fugendrücke in den beiden Kämpferfugen und einer dritten beliebigen Fuge (allgemein dreier Fugen) gegeben sind.

Anmerkung: In Brückengewölben neuerer Konstruktion sind daher die Punkte A$_1$, A$_2$ und C (in der Scheitelfuge) als Gelenke konstruiert, die in unveränderlicher Lage innerhalb der betreffenden Fuge sich befinden.

§ 22.
Spezieller Fall.
Belastung symmetrisch zur vertikalen Scheitelachse.
(EF Scheitelfuge; A$_1$ symmetrisch A$_2$)

H$_1$ und V$_1$ bezw. H$_2$ und V$_2$ seien (Fig. 39a) die *Horizontal-* und Vertikal-Komponenten von W$_1$ bezw. W

H und V_0 diejenigen des Druckes s der Scheitelfuge, so folgt aus dem Gleichgewicht des Ganzen, da $V_1 = V_2$

$$\Sigma Y = 0: \qquad -2V_1 + R = 0$$

$$1) \qquad V_1 = \frac{R}{2}$$

und aus dem Gleichgewicht der linksseitigen Gewölbehälfte

$$\Sigma Y = 0: \qquad -V_1 + R_1 + V_0 = 0.$$

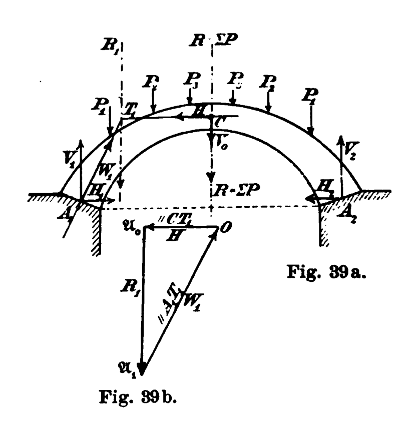


Fig. 39a.

Fig. 39b.

Vermöge 1) folgt hieraus, da $R_1 = \frac{R}{2}$

$$V_0 = 0$$

d. h. s ist horizontal. Daher:

Der Fugendruck im Scheitel eines symmetrischen und symmetrisch belasteten Tonnengewölbes ist horizontal. Er sei im folgenden *it H* (*Horizontalschub*) bezeichnet.

Anmerkung: Konstruktion von W_1 und H bei gegebenen Angriffspunkten C und A_1. (Fig 39a und b.)

Die Horizontale durch C gibt im Schnitt mit der Resultanten R_1 der an der linksseitigen Gewölbehälfte angreifenden P den Punkt T_1 und $T_1 A_1$ die Wirkungslinie von W_1. Das über $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1 = R_1$ nach den Richtungen von H und W_1 gezeichnete Kräftedreieck $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1 0$ liefert H und W_1.

§ 23. Belastung der Tonnengewölbe. Belastungslinie.

Ein Gewölbe trägt als unveränderliche Belastung außer seinem Eigengewicht in der Regel eine Materialanfüllung und bei Brückengewölben darüber die Fahrbahn. Bei letzteren tritt noch als zufällig wirkende Last die Verkehrslast hinzu.

Die unveränderliche Belastung der Auffüllung bezw. Chaussierung wird durch eine äquivalente ersetzt, die durch eine Aufschüttung von gleichem Material wie das Gewölbe hervorgerufen würde, d. h. man verwandelt die gegebene Belastung in eine Steinbelastung in folgender Weise:

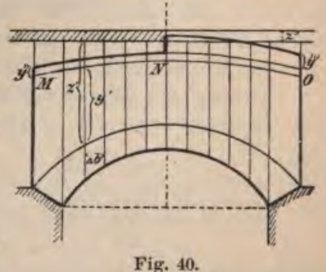


Fig. 40.

Man zerlege das Gewölbe samt Aufschüttung durch Vertikalen in schmale Streifen (Fig. 40) von beliebiger, aber so geringer Breite, daß die entstandenen Teilfiguren als Trapeze sich behandeln lassen. Eine der Vertikalen gehe durch den Scheitel. Ist nun z' die Höhe eines

solchen schmalen Streifens der Aufschüttung von der sehr geringen Breite $\triangle b$ (sämtliche Längen in Meter), γ' das Gewicht von 1 cbm des Materials der Aufschüttung, γ dasjenige von 1 cbm des Gewölbematerials (Stein), y' die Höhe eines Elements vom Material des Gewölbes und derselben Breite $\triangle b$, dessen Gewicht demjenigen des ersten Elements gleich (äquivalent) ist, so bestimmt sich aus

$$(y' \cdot \triangle b) \cdot 1 \cdot \gamma = (z' \cdot \triangle b)\, 1 \cdot \gamma'$$

$$y' = z' \cdot \frac{\gamma'}{\gamma} \text{ met.}$$

Reduziert man demnach alle Ordinaten z' im Verhältnis $\frac{\gamma'}{\gamma}$ und trägt die erhaltenen Werte von y' von der äußeren Leibung aus auf den Richtungslinien der z' auf (als z' dienen die der betreffenden Auffüllung entsprechenden Abschnitte der gezogenen Vertikalen), verbindet die Endpunkte der y' durch eine stetige Kurve MNO, so bildet diese die der Aufschüttung entsprechende „Belastungslinie".

In analoger Weise verfährt man mit dem Gewicht der Chaussierung. Ist z'' die Höhe derselben in Meter (Fig 40), so ist, wenn γ'' das Gewicht von 1 cbm Chaussierung und y'' die äquivalente Belastungshöhe im Material des Gewölbes bedeutet,

$$(y'' \triangle b) \cdot 1 \cdot \gamma = (z'' \cdot \triangle b) \cdot 1 \cdot \gamma'',$$

$$y'' = z'' \cdot \frac{\gamma''}{\gamma} \text{ met.}$$

Ist z'' überall von gleichem Werte, so ist auch y'' *konstant.*

Ebenso läßt sich die gleichförmig stetige Verkehrslast (Fig. 40) auf eine äquivalente im Gewölbematerial zurückführen. Beträgt diese Verkehrslast q kg/qm, so entfällt auf die Breite $\triangle b$ und die Tiefe 1 m die Verkehrslast $\triangle b \cdot 1 \cdot q$ kg; daher, wenn y''' die äquivalente Belastungshöhe im Material des Gewölbes bezeichnet

$$(y''' \cdot \triangle b)\, 1 \cdot \gamma = (\triangle b \cdot 1)\, q,$$

$$y''' = \frac{q}{\gamma} \text{ met.}$$

Wirken mehrere dieser Belastungen gleichzeitig, so addieren sich die entsprechenden y und die durch Kombination derselben sich ergebende Belastungslinie bildet mit der inneren Leibung die Belastungsfläche. In Fig. 40 ist die untere durchgehende Belastungslinie diejenige der Aufschüttung, die obere durchgehende die für Aufschüttung + Chaussierung, die oberste rechtsseitige für Aufschüttung + Chaussierung + halbseitige Verkehrslast.

Mittlere Werte für

γ	(Stein):	2000 — 2500 kg/cbm,
γ'	(Erde):	1600 — 2000 kg/cbm,
γ''	(Chaussierung):	2000 — 2500 kg/cbm.

Die Belastungsfläche für Aufschüttung, Chaussierung und rechtsseitige Verkehrslast ist in Fig. 40 durch stark ausgezogene Umgrenzung angedeutet.

§ 24. Drucklinie eines symmetrischen Tonnengewölbes für symmetrische Belastung.

Es sei (Fig. 41a) für die gegebene Belastung die Belastungslinie konstruiert. Dann ergeben sich die Belastungen P als die Gewichte der durch je zwei be-

nachbarte Vertikalen begrenzten prismatischen Belastungskörper von der Länge (Tiefe) = 1 m, der trapezförmigen Grundfläche F qm, welche die zwei benachbarten Vertikalen aus der stark ausgezogenen Belastungsfläche ausschneiden:

$$P = F \cdot 1 \cdot \gamma \text{ kg}$$
$$= F \cdot \gamma \text{ kg}.$$

Die Angriffspunkte der P sind die Schwerpunkte der zugehörigen F (in Fig. 41 a ist eine solche Fläche F

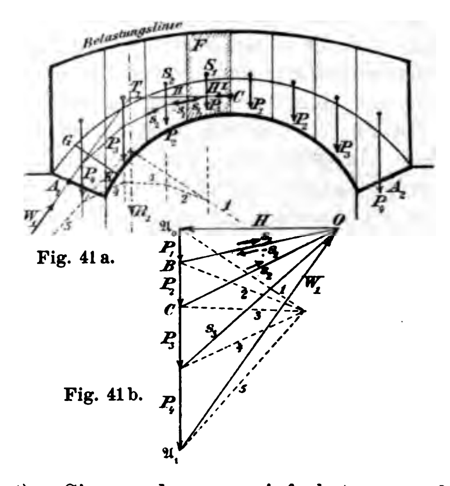


Fig. 41 a.

Fig. 41 b.

schraffiert). Sie werden am einfachsten graphisch als Trapezschwerpunkte bestimmt (Statik Bd. I § 42); bei sehr schmalen Teilflächen lassen sie sich ohne großen Fehler in der Mitte der Breiten der F annehmen.

Da γ für alle P dasselbe ist, so genügt es für *jedes P so* viele Krafteinheiten zu wählen, als sein zu-

gehöriges F Flächeneinheiten besitzt. Es sind dann aber die auf Grund dieser Annahme sich ergebenden Kräfte durch Multiplikation mit γ in ihre wahre Größe in kg umzuwandeln.

Gegeben seien (Fig. 41a) die Angriffspunkte A_1, A_2, (A_1 symmetrisch zu A_2) der Kämpferdrücke und der Angriffspunkt C des Drucks in der Scheitelfuge. Aus dem Gleichgewicht der linksseitigen Gewölbehälfte sei H und W_1 bestimmt (§ 22 Anmerkung), nachdem zuvor mittelst Kräfte- und Seilpolygon die P der linken Gewölbehälfte zur Resultanten R_1 zusammengesetzt sind.

Wir betrachten das Gleichgewicht des ersten Gewölbeteiles (I) links von der Scheitelfuge, welche mit einer der vertikalen Teilungslinien zusammenfallend gedacht sei. An ihm greift (in C) der Horizontalschub H, die Last P_1 der entsprechenden F und der Fugendruck s_1 der linksseitigen Vertikalfuge an. Die Wirkungslinien dieser drei Kräfte müssen sich daher in einem Punkte schneiden. Ist ferner (Fig. 41b) $0\mathfrak{A}_0 = H$ und $\mathfrak{A}_0 B = P_1$, so ist $BO = s_1$, da das aus den drei Kräften gebildete Kräftepolygon sich schließen muß.

Am nächstfolgenden Gewölbeteil II greifen analog die Last P_2, der Fugendruck s_2 der linksseitigen Vertikalfuge und die Kraft $-s_1$ an der rechtsseitigen Fuge an. Die Wirkungslinien dieser drei Kräfte schneiden sich bei Gleichgewicht ebenfalls in einem Punkte. Ist $BC = P_2$ (Fig. 41b), so ergibt sich, da das aus den drei Kräften gebildete Kräftepolygon sich schließen muß, $CO = s_2$.

Setzt man diese Betrachtung über sämtliche Gewölbeteile fort, so erhält man als Zug der Wirkungslinien der s ein Polygon, das durch die Punkte C ...

A_1 geht und dessen Ecken auf den Wirkungslinien der P liegen.

Da seine Seiten parallel den bezüglichen von O ausgehenden Strahlen $O\mathfrak{A}_0$, OB, OC usf. sind, so ist es ein Seilpolygon mit dem Pol O für die gegebenen P.

Man nennt dieses Polygon Drucklinie, da in ihm der Fugendruck sich fortpflanzt. Daher:

Für symmetrische Belastung eines symmetrischen Tonnengewölbes ist die Drucklinie ein zur Scheitelvertikalen symmetrisches Seilpolygon, für dessen Hälfte der Pol O den senkrechten Abstand $\mathfrak{A}_0 O = H$ vom Anfangspunkt $\mathfrak{A}_0$ des Kräftepolygons der P hat, wofern diese in der Aufeinanderfolge von Scheitel zum Kämpfer aneinander getragen werden (Fig. 41b).

§ 25. Konstruktion der Drucklinie für symmetrische Vollbelastung (bei gegebenen Punkten A_1 und C).

(Fig. 41a und b.)

Man bestimme die Wirkungslinie der Resultanten R_1 der an der linksseitigen Gewölbehälfte angreifenden P und mittelst R_1 nach § 22 Anmerkung die Kräfte W_1 und H.

Wähle die Ecke O des hierbei erhaltenen Kräftedreiecks $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1 O$ zum Pol und konstruiere von C ausgehend ein den Polstrahlen $O\mathfrak{A}_0$, OB, OC usf. entsprechendes Seilpolygon, dessen Ecken auf den P liegen. Die letzte Polygonseite geht durch A_1.

(Einfachere Konstruktion. § 25.)

I. Bestimmung des Fugendruckes einer beliebigen Radialfuge.

Dieser wird nach Größe und Richtung näherungsweise durch denjenigen Polstrahl s angegeben, der

parallel derjenigen Seite der Drucklinie geht, welche von der gegebenen Fuge getroffen wird.

In Figur 41a und b erhält z. B. Radialfuge GK den Fugendruck s_3.

II. Stützlinie.

Diese erhält man (vergl. § 18) durch Verbinden der Angriffspunkte der Fugendrücke je zweier aufeinanderfolgender Vertikalfugen (Stützpunkte). In den meisten Fällen weicht die Stützlinie so wenig von der Drucklinie ab, daß man von ihrer Konstruktion absieht.

III. Unveränderlichkeit des Werts des (horizontalen) Gewölbeschubs für jede Vertikalfuge.

Zerlegt man den Druck s einer beliebigen Fuge in eine Horizontal- und Vertikalkomponente, so erkennt man, wenn man diese Zerlegung im Kräftepolygon Fig. 41b ausführt, daß die Horizontalkomponente stets = H ist.

Anmerkung 1. Legt man durch die Eckpunkte der Drucklinie Radialfugen und ersetzt den zwischen je zwei solchen befindlichen Gewölbteil durch einen Stab, der mit der entsprechenden Polygonseite der Drucklinie zusammenfällt, so läßt sich die Drucklinie betrachten als Gleichgewichtsform eines Sprengwerkes, dessen Stäbe durch die Gewölbsteine ersetzt sind (vergl. § 14).

Anmerkung 2. Die Drucklinie, die durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge geht, heißt mittlere Drucklinie.

§ 26. Einfluß der Veränderlichkeit der Angriffspu von Kämpfer- und Scheiteldruck auf die Druckli Einfachere Konstruktion derselben bei symm. Belast

Ist bei gleichbleibender Lage von C der Punk veränderlich, so ergibt sich nach § 22, Anmerkung jede Lage von A_1 ein anderer Wert von H, ein and Pol O und eine andere Drucklinie. Da hierbei veränderliche Pol O auf der Geraden $\mathfrak{A}_0$ O (Fig. sich bewegt haben die sä lichen durc gehenden, gehörige Drucklini die durch gehende H zontale z Polarachse (Statik B § 15, II).

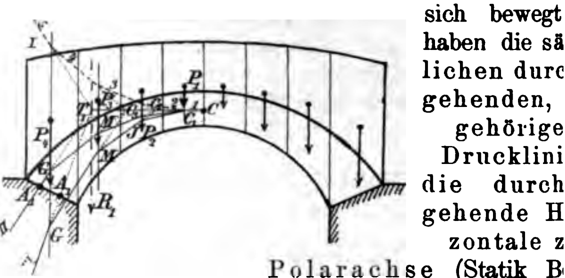


Fig. 42a.

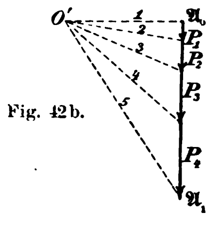


Fig. 42b.

Es läßt sich somit Statik Bd. I, § 15, III aus Drucklinie unter Benut dieser Polarachse eine z unmittelbar ableiten, die d denselben Punkt C geht.

Diese Betrachtung zu einer einfacheren K struktion der Drucklinie (bei gegebenen Pun A_1 und C):

Man wähle zur Bestimmung von R_1 ein durc gehendes Seilpolygon (I) dessen Pol O′ (Fig. 42a u *ein beliebiger Punkt* der Senkrechten in $\mathfrak{A}_0$ zu *ist (in Figur gestrichelt)* und bringe seine Seite

Schnitt mit der durch C gehenden horizontalen Polarachse (Schnittpunkte T_1, C_3, C_2, C_1 usf). Dann ist die Verbindungslinie von A_1 mit T_1 die erste Seite der Drucklinie. Sie bestimmt auf P_4 den Punkt G; $G C_3$ gibt die zweite Seite und auf P_3 den Punkt M, $M C_2$ die dritte Seite und auf P_2 den Punkt J, $J C_1$ die nächste Seite, der sich $C_1 C$ anschließt (Polygon II und III in Figur 42 a).

Ist bei unveränderlicher Lage von A_1 der Punkt C veränderlich, so liegen die den einzelnen zugehörigen Drucklinien entsprechenden Pole ebenfalls auf der Senkrechten in $\mathfrak{A}_0$ zu $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1$. Diese Drucklinien haben daher die durch A_1 gehende Horizontale zur Polaraxe (Statik Bd. I, § 15, II).

Ist C und A_1 gleichzeitig veränderlich, so erhält man demnach ∞^2 viele statisch mögliche Drucklinien. Nach der Elastizitätslehre ist hiervon diejenige die richtige, welche sich der Mittellinie des Gewölbes durchschnittlich (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate) am meisten nähert (Mittlere Drucklinie, § 25, Anmerkung 2).

Sind die Punkte A_1 und C durch Gelenke festgelegt, so erhält man nur eine, durch die Punkte A_1 und C bestimmte Drucklinie.

Ist die Mittellinie des Gewölbes selbst eine statisch mögliche Drucklinie, so heißt das Gewölbe Drucklinien-gewölbe.

§ 27. Minimal- und Maximaldrucklinie infolge Ausweichens der Widerlager. Konstruktion derselben.

Es seien in einem Gewölbe auf Grund des vorstehenden Satzes die Angriffspunkte von Scheitel- und Kämpferdruck in der Mitte der zugehörigen Fugen ge-

wählt und die entsprechende Drucklinie konstruiert. Diese Annahme genügt aber nicht zur Beurteilung der Sicherheit eines Gewölbes, da durch Ausweichen der Widerlager die Stützpunkte der einzelnen Fugen gegen die Leibungen hin gerückt werden.

Fig. 43a.

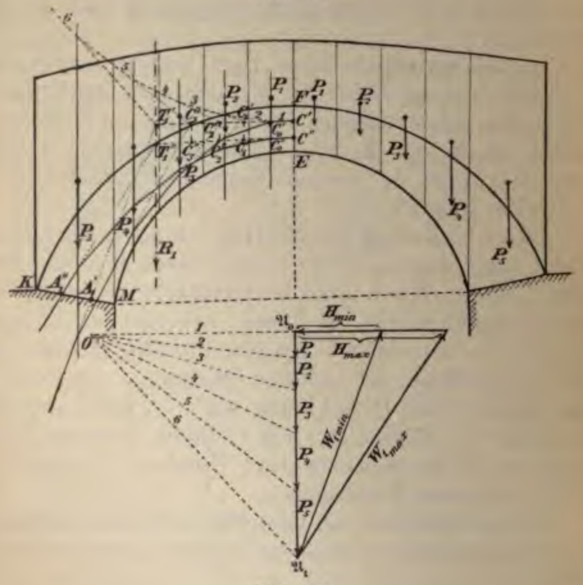


Fig. 43b.

Ein Ausweichen der Widerlager nach außen hat eine Drehung beider Gewölbehälften nach innen um die Widerlager zur Folge, was eine Verschiebung des Punktes C nach oben und des Punktes A_1 nach unten (innen) zur Folge hat. Man nimmt hierbei auf Grund der

Elastizitätslehre an, daß im ungünstigsten Fall, bei welchem das Gewölbe eben noch standfest ist, C sich der oberen Leibung bis zu $^1/_3$ der Scheitelfugenbreite und A_1 der unteren Leibung bis zu $^1/_3$ der Kämpferfugenbreite nähern könne:

$$C'F = \tfrac{1}{3}\,EF;\ A_1'M = \tfrac{1}{3}\,KM. \quad \text{(Fig. 43a u. b.)}$$

Diese Verschiebungen der Punkte C und A_1 haben aber (§ 22, Anm.) eine Abnahme der Kräfte H und W_1 und der übrigen Fugendrücke zur Folge; letztere haben daher bei der obigen Grenzlage C′ und A_1' ihr Minimum.

Die für diese Grenzlagen konstruierte Drucklinie heißt Minimaldrucklinie.

Ein Ausweichen der Widerlager nach innen hat eine Verschiebung von C nach unten und von A_1 nach oben zur Folge (Gewölbhälfte sucht um die Auflager sich nach außen zu drehen). Dies bewirkt (§ 22 Anm.) eine Zunahme der Kräfte H und W_1 und damit auch sämtlicher übrigen Fugendrücke. Man nimmt auf Grund der Elastizitätslehre als Grenzlage der Punkte C und A_1, bei welcher das Gewölbe eben noch standfest ist, wieder je den Endpunkt des äußeren Drittels der betreffenden Fuge an, so daß

$$C''E = \tfrac{1}{3}\,EF \qquad \text{(Fig. 43a u. b)}$$
$$A_1''K = \tfrac{1}{3}\,KM.$$

Die Werte der diesen Punkten A_1'' und C″ entsprechenden Kräfte H und W_1 und die übrigen Fugendrücke bilden demnach ein Maximum, die ihnen entsprechende Drucklinie heißt Maximaldrucklinie.

Die Minimal- und Maximaldrucklinie nähert sich, namentlich bei steilen Gewölben, den Leibungen stärker als die mittlere Drucklinie

Konstruktion der Minimal- und Maximaldrucklinie (Fig. 43a u. b).

Man benutze wie in § 26 zur Konstruktion der Minimaldrucklinie $C'A_1'$ ein beliebiges durch C' gehendes Seilpolygon, dessen durch C' gehende Seite horizontal ist, (Pol O; $\mathfrak{A}_0$ O senkrecht $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1$ Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6), das die Resultante R_1 der P der linksseitigen Gewölbhälfte liefert, bringe dessen Seiten zum Schnitt mit der durch C' gehenden horizontalen Polarachse in T_1', C_3', C_2', C_1', C_0', verbinde T_1' mit A_1', so ist dies die erste Seite der Minimaldrucklinie. Den Schnittpunkt derselben mit der Wirkungslinie von P_5 verbinde man mit C_3', so ist dies die zweite Seilpolygonseite bis P_4 usf. wie in § 26.

Zur Konstruktion der Maximaldrucklinie $C''A_1''$ wäre analog das Hilfsseilpolygon 1, 2, 3, 4, 5, 6 in gleicher Weise durch C'' zu legen und die Schnittpunkte seiner Seiten mit der durch C'' gehenden Horizontalen zu bestimmen. Da aber unter Benutzung desselben Poles O das neue Hilfsseilpolygon dem vorigen kongruent würde, so liegen die gesuchten Schnittpunkte T_1'', C_3'', C_2'' usf. seiner Seiten mit der Horizontalen durch C'' auf den Vertikalen durch T_1', C_3', C_2' usf., sind also aus den Punkten T_1', C_3', C_2' usf. leicht unmittelbar durch Herunterloten zu bestimmen, worauf das Aufzeichnen der gesuchten Drucklinie analog wie das der vorigen erfolgt.

§ 28. Einfluß einer beweglichen Belastung auf die Drucklinie.

An dem gewichtslos und ohne ruhende Belastung gedachten Gewölbe (Fig. 44a) wirke außer der beweglichen Verkehrslast Q, die an der linksseitigen *Gewölbhälfte* angreift, keine weitere Belastung. Im

Scheitel EF sei durchgeschnitten, dann wirken an der rechtseitigen Gewölbhälfte nur die zwei Kräfte W_2 und der Fugendruck $-s_0$ in C. Da diese Hälfte unter Einfluß dieser zwei Kräfte im Gleichgewicht ist, so muß

$$-s_0 = W_2$$

sein und beide Kräfte müssen in der Verbindungsgeraden CA_2 wirken. Durch diese Gerade ist aber auch der Schnittpunkt T_1 von s_0 und Q und durch die Verbindungslinie $T_1 A_1$ auch die Wirkungsgerade von W_1 bestimmt (s_0, Q, W_1 sind in Gleichgewicht).

Fig. 44 a.

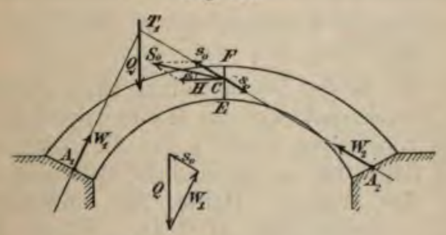


Fig. 44 b.

Ein Kräftedreieck über Q (Fig. 44 b) nach den Richtungen von W_1 und s_0 bestimmt diese zwei Kräfte.

Läßt man nun zu der Belastung Q noch die symmetrische unveränderliche Vollbelastung als gleichzeitig wirkend hinzutreten, welche für sich allein in der Scheitelfuge den horizontalen Fugendruck H hervorruft, so entsteht in C ein resultierender Scheitelfugendruck S_0, dessen Komponenten die bekannten Kräfte s_0 und H sind.

Jede weitere an der linksseitigen Gewölbehälfte angreifende Verkehrslast Q erzeugt ein s_0 von derselben

Wirkungslinie und Sinn, vermehrt also die Größe von S_0 und deren Horizontalneigung α. Daher:

Die möglichst volle Belastung einer Gewölbehälfte (einseitige Belastung durch Verkehrslast) liefert in Verbindung mit der gleichzeitig wirkenden unveränderlichen symmetrischen Vollbelastung ein Maximum des Scheiteldruckes S_0 nach Größe und Ablenkung von der Richtung der Horizontalen.

§ 29. Konstruktion der Drucklinie für gleichzeitig wirkende unveränderliche symmetrische Vollbelastung und einseitige gleichförmige Verkehrslast.

(Bei gegebenen Punkten A_1, A_2 und C; A_1 symmetrisch A_2.) (Fig. 45a, b, c, d.)

Eine der beiden Gewölbhälften trage gleichförmig verteilte Verkehrslast (qkg/qm Horizontalprojektion).

Man konstruiere (nach § 23) die Belastungslinie der einen Hälfte für unveränderliche Belastung (P) und diejenige der anderen Hälfte für unveränderliche Belastung + Verkehrslast (P + Q), bringe in den Schwerpunkten der Belastungsteilflächen der P die P und in denjenigen der P + Q die P + Q als Lasten an. Man denke sich zunächst nur die auf beide Gewölbhälften sich erstreckende Belastung der P wirkend und konstruiere (nach § 22 Anm.) den horizontalen Scheitelfugendruck H (Fig. 45a u. b). In Figur 45a ist diese Konstruktion, um die linke Gewölbhälfte nicht mit Linien zu überlasten, an der rechtsseitigen, von der Verkehrslast freien Gewölbhälfte ausgeführt. Dann *lasse man* die einseitige (linksseitige) Verkehrslast der *Q wirken,* bestimme deren Resultante $R_1' = \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) \cdot q$

$= q \frac{1}{2}$ kg (l Spannweite des Gewölbes in met, q Verkehrslast pro qm), deren Wirkungslinie in der Mitte der betreffenden Gewölbhälfte liegt (Fig. 45 a), bestimme auf ihr durch die Gerade $C A_2$ den Punkt T_1 und die Verbindungslinie $T_1 A_1$. Konstruiere den durch die Resultante R_1' der Q hervorgerufenen Scheitelfugendruck s_0 mittelst eines Kräftedreieckes $\mathfrak{A}_0' \mathfrak{A}_1' O'$ (Fig. 45 c) über $\mathfrak{A}_0' \mathfrak{A}_1' = R_1'$ nach den Richtungen der $T_1 C$ und $T_1 A_1$.

Konstruiert man nun aus den kombinierten Lasten $P + Q$ (die Q sind bei gleicher Breite der Belastungsteilflächen ebenfalls gleich) ein Kräftepolygon $\mathfrak{A}_0'' \mathfrak{A}_1''$ (Fig. 45 d), macht $\mathfrak{A}_0'' J =$ dem gefundenen H und $O'' J =$ dem gefundenen s_0 (nach Größe, Richtung und Sinn), dann ist $O'' \mathfrak{A}_0''$ deren Resultante, also der Scheitelfugendruck S_0 bei kombinierter Belastung. Daher ist O'' der Pol der Drucklinie für kombinierte Belastung.

Die Aufzeichnung derselben beginne man von C aus für die mit $P + Q$ belastete Hälfte durch Parallelen zu den von O'' ausgehenden Polstrahlen der $P + Q$ (Seilpolygon); fügt man dann im Kräftepolygon (Fig. 45 d) von $\mathfrak{A}_0''$ ausgehend nach oben die Belastungen P der anderen Hälfte in der Reihenfolge von Scheitel zum Kämpfer an, so bestimmen die von O'' ausgehenden, ihnen entsprechenden Polstrahlen der P die Drucklinie in der mit den P belasteten anderen Hälfte (Seilpolygon).

Die Drucklinie als Ganzes ist also ein unsymmetrisches Seilpolygon mit dem Pol O''. In der mit $P + Q$ belasteten Hälfte kommt sie der oberen Leibung, in der anderen der unteren Leibung näher als die *Drucklinie für* alleinige symmetrische Vollbelastung *der P.*

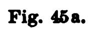


Fig. 45a.

Fig. 45b.

Fig. 45c.

Fig. 45d.

30. Bedingungen und Untersuchung der Standfestigkeit der Tonnengewölbe.

Ein Tonnengewölbe ist standfest, wenn für jede liebige radial gerichtete Fuge in Beziehung auf den ihr tätigen Fugendruck, der den einen der durch e getrennten Gewölbeteile auf den anderen als Unterge zu drücken sucht, dieselben vier Bedingungen erllt sind, welche in § 17 für die Standfestigkeit der auern bezüglich irgend einer Lagerfuge aufgestellt orden sind. Es darf also bei ungünstigster Belastung:

1. die Stützlinie bezw. die von ihr nur sehr wenig weichende Drucklinie an keiner Stelle die Leibungen erschreiten,

2. die Abweichung der Wirkungslinie des Fugenuckes von der Fugennormalen für keine Radialfuge ößer als der Reibungswinkel ($\varphi = 30^0$) sein,

3. die Stützlinie bezw. Drucklinie an keiner Stelle nerhalb eines der beiden äußeren Drittel der Fugeneite (Radialfugen) treten,

4. die Inanspruchnahme des Materials an keiner elle des Gewölbes größer als die zulässige sein.

Die Bedingung 2. ist fast immer von selbst erfüllt.

Die Untersuchung betreffend der Bedingung 4. t Aufgabe der Festigkeitslehre (vergl. Bändchen Festigitslehre).

Die statische Untersuchung beschränkt sich auf , 2. und 3. und wird mit Hilfe des Vorstehenden graisch geführt, nachdem zuerst die Gewölbstärke auf rund statischen Empfindens oder auf Grund ähnlicher orgänge angenommen wurde.

Trägt das Gewölbe nur unveränderliche Belastung, konstruiere man für diese die mittlere, die Maximald Minimaldrucklinie. Tritt eine derselben außerhalb

des Gewölbeprofils oder (an der Stelle größter Annäherung an eine Leibung) innerhalb eines der äußeren Drittel der radialen Fugenbreite an jener Stelle, so ist das Profil zu erbreitern und die Untersuchung aufs neue vorzunehmen.

Trägt das Gewölbe auch Verkehrslast, so sind sowohl für ständige Last + beiderseitige Verkehrslast als ständige Last + einseitige Verkehrslast (§ 29) je die obigen drei Drucklinien zu konstruieren und hierauf wie oben zu verfahren.

An diese statische Untersuchung hat sich diejenige hinsichtlich der Bedingung 4. anzuschließen. Nach der Elastizitätslehre tritt in denjenigen Fugen, in denen die Drucklinie innerhalb eines der äußeren Drittel der Fugenbreite tritt, am entgegengesetzten Ende der Fuge Zugspannung und damit dort ein Klaffen der Fugen ein. Bleibt die Drucklinie innerhalb des mittleren Drittels, so treten in denjenigen Fugen, in denen ihre größte Annäherung an eine der Leibungen erfolgt, die größten Beanspruchungen des Materials auf Druck ein (Bruchfugen). Die Untersuchung betreffend 4. ist also für diese Bruchfugen durchzuführen (vergl. Bändchen Festigkeitslehre). Ergibt sie eine Beanspruchung, die größer ist als die zulässige, so ist das Gewölbeprofil ebenfalls zu erbreitern.

Anmerkung. Bei flachen Gewölben von kleiner Spannweite genügt in den meisten Fällen die Konstruktion der mittleren und der Minimaldrucklinie (Ausweichen der Widerlager nach außen), oft auch die erstere allein.

§ 31. Untersuchung der Standfestigkeit der Gewölbepfeiler.

Ein Gewölbepfeiler ist standfest, wenn für ihn unter Wirkung der ungünstigsten Verhältnisse ebenfalls die Bedingungen erfüllt sind, welche am Schlusse des § 17 aufgestellt sind. Für die statische Untersuchung ist also die Stützlinie in ihm zu konstruieren (vergl. § 18). Dabei unterscheiden wir:

I. Widerlags-(Ort-)Pfeiler (zwischen Gewölbe und Terrain stehend, Fig. 46 a).

II. Freistehende (Mittel-)Pfeiler (zwischen zwei anstoßenden Gewölben sich befindend, Fig. 48 a).

I. Widerlagspfeiler.

Ein solcher soll den Bedingungen der Standfestigkeit auch ohne den Gegendruck etwa hinterfüllter Erde genügen, also nur durch sein Eigengewicht den Kämpferdruck auszuhalten imstande sein. Der für den Pfeiler ungünstigste Kämpferdruck ist W_{max}, da er nicht nur am größten ist, sondern auch am wenigsten von der Horizontalen abweicht. Er tritt bei der Maximaldrucklinie ein. Für diesen wäre also nach §§ 18 u. 19 bezw. 20 die Stützlinie im Pfeiler zu konstruieren.

Gehen die Radialfugen des Gewölbes langsam in die Horizontalfugen des Pfeilers über und liegen die Wirkungslinien der Gewichte G_1, G_2, G_3 usf. der 1 met. tiefen Teilkörper I, II, III usf. (Fig. 46 a) des Pfeilers nicht in einer und derselben Vertikalen, so lassen sich die Stützpunkte C_1, C_2, C_3 usf. der Horizontalfugen einfacher dadurch auffinden, daß man die Drucklinie des Gewölbes durch den Pfeiler hindurch (unter Benutzung desselben Poles O) fortsetzt (Fig. 46 a und b).

Dieselbe Betrachtung wie in § 24 führt nämlich zu dem Resultat, daß die Seiten des Seilpolygons im Pfeiler die Wirkungslinien der Fugendrücke s des Pfeilers darstellen (der Pfeiler läßt sich demnach als erweitertes

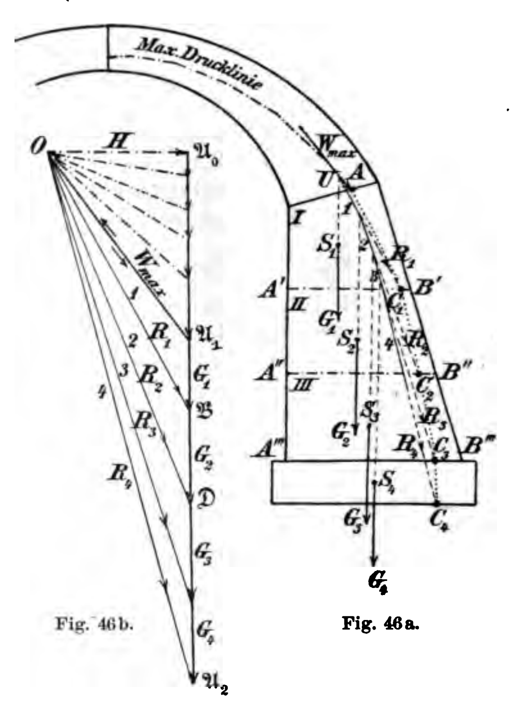


Fig. 46b. Fig. 46a.

und verlängertes Gewölbe betrachten, dessen Fugen horizontal sind), so daß also der Schnittpunkt einer *Horizontalfuge* mit der entsprechenden Seilpolygonseite *der Stützpunkt* in dieser Fuge ist.

In Fig. 46 b ist $O\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1$ die der Maximaldrucklinie im Gewölbe entsprechende Polstrahlenfigur mit dem Kräftepolygon $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1$, ferner $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ = und parallel G_1, $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ = und parallel G_2 usf. gemacht. Den neuen Polstrahlen $O\mathfrak{B}$, $O\mathfrak{D}$ usf. entspricht das hierzu konstruierte Seilpolygon 1, 2, 3 usf., wobei die erste neue Seilpolygonseite 1 durch den Schnittpunkt U von G_1 und W_{max} zu ziehen ist. (W_{max} ist auf den Pfeiler mit umgekehrtem Pfeil, also im Sinne $O\mathfrak{A}_1$ wirkend, anzunehmen.) Ihr Schnitt mit der Fuge $A'B'$ ist deren Stützpunkt C_1. Analog findet man in den Schnittpunkten der Drucklinienseiten 2, 3 usf. mit den Fugen $A''B''$, $A'''B'''$ usf. deren Stützpunkte C_2, C_3 usf. (Fig. 46 a), deren Verbinden die Stützlinie im Pfeiler liefert.

Die Drucklinie im Widerlagspfeiler weicht von der Stützlinie um so mehr ab, je mehr die Wirkungslinien der G sich derselben Vertikalen nähern und kann daher im allgemeinen nicht, wie die Drucklinie im Gewölbe, für sich allein die Stützlinie bei der Beurteilung der Standfestigkeit des Pfeilers ersetzen.

Fallen G_1, G_2, G_3 usw. in eine und dieselbe Vertikale, so fallen sämtliche Ecken des Seilpolygons im Pfeiler mit U zusammen und man hat dann nur durch U die Parallelen zu $O\mathfrak{B}$, $O\mathfrak{D}$ usf. zu ziehen, welche die Horizontalfugen in deren Stützpunkten C_1, C_2 usw. schneiden.

Fig. 47.

Anmerkung. Bei niederen Pfeilern genügt die Bestimmung des Stützpunktes der *Bodenfuge* $A'''B'''$ (*Fig.* 47), indem man im *Schwerpunkt S des ganzen* über $A'''B'''$ befindlichen Mauer-

körpers dessen Gewicht G anbringt und die Resultante R von G und W_{max} konstruiert, deren Schnitt mit A‴ B‴ der gesuchte Stützpunkt C_3 ist.

II. Mittelpfeiler.

Der ungünstigste Fall für einen solchen ergibt sich durch die Tendenz eines Kippens des Pfeilers um eine der Längskanten A‴ oder B‴ (Fig. 48a), wodurch in

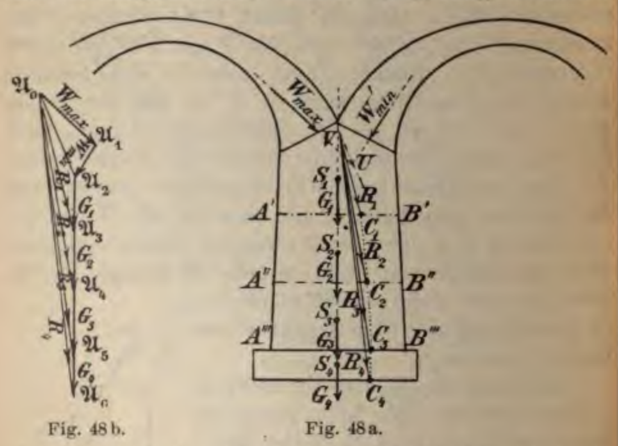


Fig. 48b. Fig. 48a.

einem anstoßenden Gewölbe die Maximaldrucklinie, im anderen die Minimaldrucklinie (§ 27), also in der einen Kämpferfuge des Pfeilers W_{max}, in der anderen W'_{min} hervorgerufen würde.

Ist nun (Fig. 48 b) $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1 = W_{max}$, $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = W'_{min}$, so ist $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2$ deren Resultante. Ihre Wirkungslinie ist die zu $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2$ durch den Schnittpunkt U der Wirkungslinien beider Kräfte gezogene Parallele, die G_1 in V schneidet. *Ist ferner* $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 =$ und parallel G_1, so ist $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3$ die

Resultante R_1 von W_{max}, W'_{min} und G_1. Man findet ihre Wirkungslinie mittelst einer Parallelen zu $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3$ durch V. Diese bestimmt den Stützpunkt C_1 auf $A'B'$.

Macht man ferner (Fig. 48 b) $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4 = G_2$, so gibt $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_4$ die Resultante R_2 von R_1 und G_2 und ihre Wirkungslinie ist die durch den Schnittpunkt beider, also wieder durch V gezogene Parallele zu $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_4$, die den Stützpunkt C_2 auf $A''B''$ bestimmt usw.

Man ziehe also durch V der Reihe nach die Parallelen zu R_2, R_3 usf., so liefern diese die Stützpunkte C_2, C_3 usf.

Anmerkung 1. Bei niederen Pfeilern genügt die Konstruktion des Stützpunktes der Bodenfuge. Er bestimmt sich mittelst der durch V zu $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_5$ gezogenen Parallelen, nachdem $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_5$ = und parallel dem Gewichte $G = G_1 + G_2 + G_3$ das über $A'''B'''$ sich befindlichen Mauerkörpers gemacht worden ist.

Anmerkung 2. Haben beide Gewölbe nur unveränderliche Belastung zu tragen, so genügt statisch die vorstehende Untersuchung.

Tragen die Gewölbe auch Verkehrslast, so ist diese Untersuchung zweimal durchzuführen und zwar für das

1. { linksseitige Gewölbe vollbelastet (ruhende Belastung + Verkehrslast) und Minimaldrucklinie in demselben;
rechtsseitige Gewölbe mit ruhender Belastung und Maximaldrucklinie in demselben;

2. { linksseitige Gewölbe vollbelastet (ruhende Belastung + Verkehrslast) und Maximaldrucklinie in demselben;
rechtsseitige Gewölbe mit ruhender Belastung und Minimaldrucklinie in demselben

Anmerkung 3. Der statischen Untersuchung hat sich diejenige auf Inanspruchnahme des Materials in jedem dieser Fälle anzuschließen (vergl. Bd. Festigkeitslehre).

Anmerkung 4. Aus Vorstehendem ergibt sich die Wichtigkeit einer guten Fundierung der Pfeiler, welche ein einseitiges Senken derselben zur Unmöglichkeit macht. Der Eintritt eines solchen ruft nicht nur im Gewölbe, sondern auch im Pfeiler selbst Änderungen der Druck- bezw. Stützlinie hervor, welche für die Sicherheit der Konstruktion gefährlich werden können.

VI. Kapitel.

Theorie des Erddruckes.

(Für eben abgeglichenes Terrain und ohne Rücksicht auf Erdkohäsion.)

---

§ 32. Bestimmung des Bruchprismas von größtem Druck.

Entfernt man die einen aufgeschütteten Erdkörper seitlich stützende Mauer, so löst sich ein prismatischer Teil desselben los, der sich auf einer ebenen Gleitfläche nach unten zu bewegen sucht. Betrachtet man dieses Erdprisma auf eine Länge (Tiefe) von 1 Meter, ersetzt die Wirkung von Mauer- und stützender Gleitfläche auf dieses Prismenstück durch deren Normaldrücke und die in diesen Flächen wirkenden, dem Gleiten des Prismas widerstehenden Reibungswiderstände, so bleibt das Prismenstück ABX (Fig. 49a), welches außerdem unter Einfluß seines Eigengewichts Q steht, im Gleichgewicht.

Die resultierende Widerstandskraft der Mauer sei P, diejenige der Gleitfläche (Unterlage) T, dann bilden

im Grenzzustand des Gleichgewichts die Kräfte P bezw. T mit den Normalen zu den betr. Flächen die Reibungswinkel φ' (Erde auf Mauer) bezw. φ (Erde auf Erde) (Statik Bd. I, § 50).

Die drei Kräfte P, Q, T sind im Gleichgewicht, ihre Wirkungslinien schneiden sich daher in einem Punkte U und die beiden Kräfte P und T bestimmen

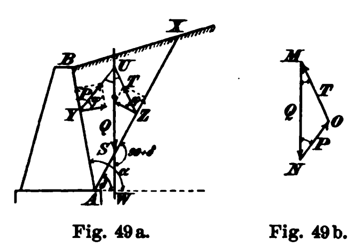


Fig. 49 a. **Fig. 49 b.**

sich aus einem Kräftedreieck MNO (Fig. 49b), das über Q nach den Richtungen von P und T konstruiert wird.

In diesem Dreieck MNO ist

$\sphericalangle N = \sphericalangle (P, Q) = 360^0 - (90^0 + a + 90^0 + \varphi') = 180^0 - (a + \varphi') = 180 - a - \varphi'$ (Viereck UYAW),

$\sphericalangle M = \sphericalangle (Q, T) = (90^0 + \delta) - (90^0 + \varphi) = \delta - \varphi$ (Dreieck USZ).

Zieht man nun (Fig. 50) AC unter der Horizontalneigung φ, ferner AD so, daß $\sphericalangle BAD = \varphi + \varphi'$ und durch den Endpunkt X des Bruchprismas die Parallele XG zu AD, so ist

$\sphericalangle XAG = \delta - \varphi = \sphericalangle M$

$\sphericalangle XGA = 180^0 - \sphericalangle GAD = 180^0 - \left[(\varphi + \varphi') + (a - \varphi)\right]$

$= 180^0 - \varphi' - a = \sphericalangle N$,

also $\triangle$ AXG $\sim$ Kräftedreieck MON, daher

$$\frac{P}{Q} = \frac{XG}{AG},$$

und wenn XX′ parallel AC,

$$1) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{AX'}{XX'}.$$

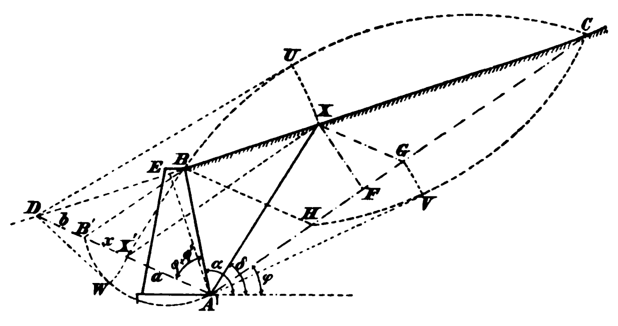


Fig. 50.

Nun ist das Gewicht Q des Bruchprismas vom Querschnitt ABX und der Länge = 1 m (γ Gewicht von 1 cbm Erde):

$$Q = \frac{1}{2} AE \cdot BX \cdot \gamma \text{ kg}$$

(wenn AE und BX in met und AE lotrecht DC),

somit vermöge 1)

$$2) \quad P = \frac{1}{2} AE \cdot BX \cdot \gamma \cdot \frac{AX'}{XX'} = \frac{1}{2} AE \cdot \gamma \cdot \frac{BX}{XX'} \cdot AX'.$$

Ist nun BB′ ebenfalls parallel AC, so ist

$$\frac{BX}{B'X'} = \frac{DC}{DA}$$

$$\frac{DX'}{XX'} = \frac{DA}{AC}$$

$$\frac{BX}{B'X'} \cdot \frac{DX'}{XX'} = \frac{DC}{AC}$$

oder

$$\frac{BX}{XX'} = \frac{DC}{AC} \cdot \frac{B'X'}{DX'}$$

und damit gibt Gleichung 2)

$$3) \qquad P = \tfrac{1}{2}\, AE \cdot \gamma \cdot \frac{DC}{AC} \cdot \frac{B'X'}{DX'} \cdot AX'$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} AE \cdot \gamma \cdot \frac{DC}{AC}\right) \cdot \left(\frac{B'X'}{DX'} \cdot AX'\right).$$

Da der Wert des ersten Klammerausdruckes nur abhängig ist von gegebenen Größen, so ändert sich der Wert von P nur mit dem Wert der zweiten Klammer.

Für die Sicherheit der Mauer ist es jedoch notwendig, dasjenige Bruchprisma zu kennen, für welches P ein Maximum wird. Für dieses muß also der Wert der zweiten Klammer ein Maximum sein.

Bezeichnet man den konstanten Wert der ersten Klammer mit C, AD mit a, B′D mit b und X′D mit x, so kommt

$$P = C \cdot \left((a - x) \cdot \frac{x - b}{x}\right)$$

$$= C \cdot \left(a + b - \frac{ab}{x} - x\right)$$

und nach den Regeln der Differentialrechnung, wo für P_{max} der Wert $\frac{dP}{dx} = 0$ sein muß,

$$\frac{dP}{dx} = C\left(\frac{ab}{x^2} - 1\right) = 0,$$

woraus $$x = \sqrt{ab}$$

der Wert für x, der P zu einem Maximum mach

d. h. x mittlere Proportionale zu a und b,

oder $$\frac{DB'}{DX'} = \frac{DX'}{DA},$$

aber $$\frac{DB'}{DX'} = \frac{DB}{DX},$$

und $$\frac{DX'}{DA} = \frac{DX}{DC},$$

somit $$\frac{DB}{DX} = \frac{DX}{DC},$$

d. h. auch

DX mittlere Proportionale zu DB und D

§ 33. Bestimmung des größten Erddruckes P_{max} eine gegebene Fläche.

Nach Obigem ist (Fig. 50)

$$\frac{DA}{DX'} = \frac{DX'}{DB'}$$

$$\frac{DX'}{DB'} = \frac{DX}{DB}$$

$$\frac{DA}{DX'} = \frac{DX}{DB};$$

daher $\quad BX'$ parallel AX,

somit $\quad \underline{\triangle XAB} = \triangle XAX' = \underline{\triangle XAG}$

oder $\quad AE \cdot BX = XF \cdot AG \quad (XF$ lotrecht $AC)$

$$= XF \cdot XX',$$

somit nach § 32 Gleichung 2)

$$P_{max} = \tfrac{1}{2} XF \cdot XX' \cdot \gamma \cdot \frac{AX'}{XX'} = \tfrac{1}{2} XF \cdot AX' \cdot \gamma$$
$$\underline{= \tfrac{1}{2} XF \cdot XG \cdot \gamma}$$

($\gamma = 1600$—2000 kg, XF und XG in met, P_{max} in kg).

§ 34. Graphische Konstruktion des Bruchprismas von größtem Druck.

Die durch A (Fig. 50) unter der Horizontalneigung φ (im Mittel für geschüttete und trockene Erde $\mathrm{tg}\,\varphi = 2:3 = 1:1\frac{1}{2} = 0{,}67$) gezogene Gerade AC der natürlichen Böschung trifft die Terrainfläche in C; die Gerade AD werde so gezogen, daß $\sphericalangle BAD = \varphi + \varphi'$. (Vergl. Anmerkung.)

Sind beide Punkte C und D zugänglich, so lege man durch C und B einen beliebigen Kreisbogen, an diesen von D aus die Tangente DU und mache $DX = DU$.

Ist D unzugänglich, so ziehe man BH parallel DA; dann ist auch

AG mittlere Proportionale zu AH und AC.

Lege daher (Fig. 50) durch H und C einen beliebigen Kreisbogen, ziehe an ihn die Tangente AV, mache $AG = AV$, so bestimmt die Parallele GX zu AD den Punkt X.

Ist C unzugänglich, so lege man, da auch DX' mittlere Proportionale zu DB' und DA, durch B' und A einen beliebigen Kreisbogen, von D aus an ihn die Tangente DW (Fig. 50) mache DX' = DW, so bestimmt die Parallele X'X zu AC den Punkt X.

Anmerkung: Je kleiner φ', desto näher rückt D und somit auch X dem Punkt B. In demselben Maße nehmen aber die den Druck P_{max} bestimmenden Strecken XF und XG zu. Daher erhält man das größtmögliche P_{max}, wenn

$$\underline{\varphi' = 0}$$

gewählt wird. Dieser ungünstigste aller Fälle tritt in der Praxis selbst bei Eindringen von Wasser, das die Mauerwand AB schlüpfrig macht, wohl kaum ein; bei der Beurteilung der Standfestigkeit der Mauer geht man jedoch bei Zugrundelegung dieses Wertes am sichersten. Man ziehe also AD stets so, daß $\sphericalangle$ BAD ebenfalls $= \varphi$ wird. Die Wirkungslinie von P_{max} ist dann normal zu AB.

Besondere Fälle.

$(\varphi' = 0)$

1. Horizontal abgeglichenes Terrain.

An Stelle der allgemeinen obigen Methode findet man für diesen Fall (Fig. 51) den Punkt X einfacher durch Halbierung des $\sphericalangle$ BAC.

Denn, da XX' parallel AC,

so ist $\sphericalangle BXX' = \varphi$,

somit, da auch, wenn $\varphi' = 0$, $\sphericalangle BAX' = \varphi$,

Viereck BX'AX ein Kreisviereck,

daher $\sphericalangle XAB = \sphericalangle BX'X$.

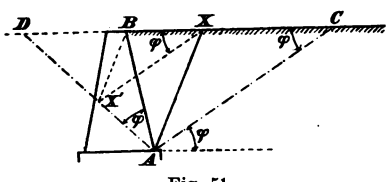


Fig. 51.

Da aber BX' parallel AX,

so ist auch $\sphericalangle XAC = \sphericalangle BX'X$,

somit $\underline{\sphericalangle XAB} = \underline{\sphericalangle XAC}$.

2. Terrainfläche in natürlicher Böschungslinie.

Die Terrainfläche ist parallel AC (Fig. 52); C fällt ins Unendliche und somit auch Punkt X. XF = dem senkrechten Abstand e beider Parallelen; XG = AD;

somit $\underline{P_{max} = \frac{1}{2} e \cdot AD \cdot \gamma}$.

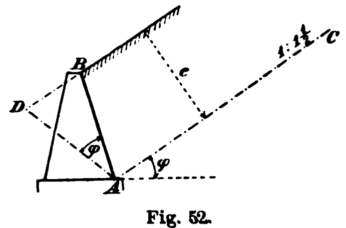


Fig. 52.

Es sei nun A″ ein zu A′ benachbarter Punkt in der Entfernung $\triangle x$, so entspricht die in A″ errichtete Ordinate A″C″ dem Erddruck P″ auf BA″ und es ist

$$P'' = \text{Dreieck } BA''E'',$$

aber

$$P' = \text{Dreieck } BA'E',$$

somit

$$P'' - P' = \triangle P = \text{Trapez } E'A'A''E'' = \triangle F.$$

Ist $\triangle x$ unendlich klein, so ist das Trapez unendlich schmal und der Erddruck $\triangle P$ auf das Element $\triangle x$, der gleich dem Inhalt $\triangle F$ des Trapezes ist, kann als in dem zu einem Punkte zusammengeschrumpften Elemente $\triangle x$ angreifend angenommen werden.

Ist nun die Mauerlänge l in unendlich viele solcher unendlich kleinen Elemente $\triangle x$ und dementsprechend das Dreieck ABE durch die zugehörigen Ordinaten in die gleiche Anzahl entsprechender Trapeze von unendlich kleiner Breite zerlegt, in jedem Element den an ihm angreifenden Erddruck $\triangle P$ normal zum Element angebracht, dann ist das statische Moment der Resultanten P sämtlicher $\triangle P$ in Beziehung auf B = der Summe der statischen Momente der letzteren in Beziehung auf denselben Punkt (Statik Bd. I, § 18).

Es ist also, wenn x_0 den senkrechten Abstand der Wirkungslinie des Erddruckes P auf AB von B bezeichnet

$$P x_0 = \sum_{x=0}^{x=l} (\triangle P \cdot x)$$

$$= \sum_{x=0}^{x=l} (\triangle F \cdot x)$$

($\triangle F$ bezeichnet den Inhalt des Trapezes von der Breite $\triangle x$).

$\triangle F \cdot x$ ist aber (Statik Bd. I, § 38) das Moment des Flächenelements $\triangle F$ in Bezug auf die zu AB in B errichtete Senkrechte,

somit $\sum_{x=0}^{x=l} (\triangle F \cdot x)$ = dem Moment des Dreiecks BAE in Beziehung auf diese Achse, also, wenn s den Abstand des Schwerpunktes dieses Dreiecks von jener Achse bezeichnet,

$$P \cdot x_0 = \text{Dreieck } BAE \cdot s,$$

woraus

$$x_0 = s,$$

d. h. P geht durch den Schwerpunkt des Dreiecks BAE somit

$$\underline{x_0 = \tfrac{2}{3} l.}$$

D. h.: Der Druck eines eben abgeglichenen Terrains auf eine Mauerfläche, deren oberes Ende in der Terrainlinie liegt, greift in einer Entfernung = $\frac{2}{3}$ der Mauerlänge vom oberen Endpunkt an.

§ 36. Größe und Angriffspunkt des Erddruckes auf eine Teilfläche eines polygonal gebrochenen Mauerprofils.

Um für die ebene Teilfläche A'A'' (Fig. 54) des gegebenen Mauerprofils den Erddruck zu bestimmen, verlängere man A'A'' bis zum Schnittpunkte M mit der Terrainfläche und bestimme nach § 34 und 33 den Erddruck P'' auf die ganze Fläche MA''. Mache in A'' die senkrechte Ordinate A''E'' = z'', so daß (vergl. § 35)

$$\frac{z'' \cdot MA''}{2} = P'' \quad (P'' = \text{Dreieck } MA''E''),$$

$$z'' = \frac{2\,P''}{MA''} \text{ wird,}$$

(Maßstab für z'' beliebig)

ziehe ME″ und A′E′ senkrecht MA″, so wird (§ 35) der Erddruck auf Fläche A′A″

P = Inhalt des Trapezes E′A′A″E″.

Letzterer läßt sich mittelst Abgreifens der Ordinate A′E′ im gewählten Ordinatenmaßstab leicht ermitteln. Daher: Der Erddruck auf eine Teilfläche ist gleich dem Inhalt der ihr entsprechenden Teilfläche der Druckverteilungsfigur.

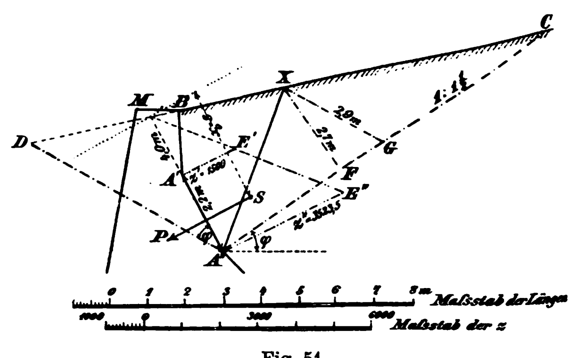


Fig. 54.

Ferner führen, wenn x_0 die senkrechte Entfernung der Wirkungslinie der Kraft P von M bezeichnet, analoge Erwägungen wie in § 35 zu der Gleichung:

$$P x_0 = \sum_{x = a_1}^{x = a_2} (\triangle F \cdot x) \qquad \begin{pmatrix} MA'' = a_2 \\ MA' = a_1 \end{pmatrix}$$

= Moment des Trapezes E′A′A″E″ in Beziehung auf die zu MA″ in M gezogene Senkrechte

$=$ Trapez $E'A'A''E'' \cdot s$ (s Abstand des Schwerpunktes S des Trapezes $E'A'A''E''$ von dieser Senkrechten),

woraus $$\underline{x_0 = s.}$$

D. h.: Die Wirkungslinie des auf die Teilfläche $A'A''$ wirkenden (normalen) Erddruckes geht durch den Schwerpunkt der ihr entsprechenden Teilfläche der Druckverteilungsfigur.

Anmerkung: Ist das Profil der gedrückten Fläche eine krumme Linie, so zerlege man sie in Teilflächen, die ohne großen Fehler als eben betrachtet werden können, d. h. man ersetze den gekrümmten, dem Erdkörper zugekehrten Teil des Mauerprofils durch einen geradlinig polygonalen und bestimme für jeden Teil desselben (nach oben) Größe und Angriffspunkt des (normal zur Teilfläche stehenden) Erddruckes.

In vielen Fällen genügt es auch, den polygonal gebrochenen, dem Erdkörper zugekehrten Teil des Mauerprofils durch eine vom unteren Ende desselben ausgehende gerade Ausgleichslinie zu ersetzen und für diese den Druck P zu bestimmen. In Fig. 55 ist CE parallel AB gezogen, dann ist AE die Ausgleichslinie ($\triangle ABC = \triangle ABE$), für welche P zu bestimmen wäre.

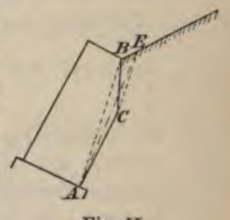


Fig. 55.

Beispiel: In Fig. 54 ist $A'A'' = 2{,}2$ m und $MA'' = 4$ m. Der Erddruck P auf die ganze Fläche $A''M$ ergibt sich

$$P = \tfrac{1}{2} XF \cdot XG \cdot \gamma.$$

Mit dem Längenmaßstab abgegriffen, findet sic
$XF = 2{,}7$ m, $XG = 2{,}9$ m; somit wird

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2{,}7 \cdot 2{,}9 \cdot 1800 = 7047 \text{ kg}.$$

Man berechne nun

$$z'' = A''E'' = \frac{2\,P}{MA''} = \frac{2 \cdot 7047}{4} = 3523{,}5$$

und trage diese Strecke in beliebigem Maßstab (Ordinatei maßstab) senkrecht MA'' in A'' an, ziehe ME'', mach $A'E'$ senkrecht MA', so ergibt sich mittelst Ordinatei maßstabes abgegriffen

$$z' = A'E' = 1500.$$

Daher Erddruck auf $A'A''$

$$P = \text{Inhalt des Trapezes}$$

$$A'A''E''E' = \frac{1500 + 3523{,}5}{2} \cdot 2{,}2 = 5525{,}8 \text{ kg}.$$

Seine Wirkungslinie geht durch den (graphisc nach Statik Bd. I, § 42 zu ermittelnden) Schwerpunkt dieses Trapezes und ist lotrecht zu $A'A''$.

§ 37. Erddruck bei gleichförmig und stetig belastet(Terrainfläche.

Die Belastung sei q kg/qm Horizontalprojektio Man ersetze sie durch die Last einer überall gleic hohen, dem Terrain aufgeschütteten Erdschicht U (Fig. 56) von der Höhe $h_{\text{met.}}$, so daß

$$1 \cdot 1 \cdot h \cdot \gamma = q,$$

$$h = \frac{q}{\gamma} \text{ met.}$$

Gewicht von 1 cbm Erde; $\gamma = 1600$—2000 kg

Durch Aufschüttung dieser Erdlast wird die Gleitebene AX nicht verändert und ist diese nach § 34 für UV als Terrainfläche zu ermitteln. Man bestimme den Schnittpunkt U der gedrückten Fläche AB mit der oberen Begrenzungslinie UV der Erdlast, suche den Erddruck P_{UA} auf die ganze Fläche UA (unter Annahme von UV als Terrainfläche) und bestimme nach § 36 den auf das Stück AB dieser Länge entfallenden Teil desselben mittelst Inhalt und Schwerpunkt des diesem Stück AB entsprechenden Trapezes ABFE, wenn BF senkrecht AB gezogen wird.

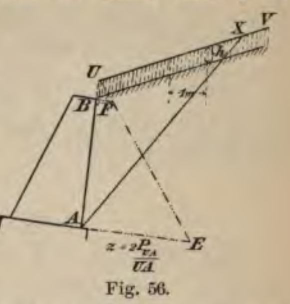


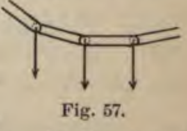
Fig. 56.

VII. Kapitel.

Vom Gleichgewicht der seilartigen Körper.

§ 38. Die Kette.

Die Kette ist ein aus starren stabartigen Gliedern von kleiner Länge zusammengesetzter Körper, von welchen je zwei um einen als Scharnier wirkenden Knotenpunkt mit vollkommener Beweglichkeit drehbar sind (Fig. 57). Sie dient als Hängewerk oder in geradliniger Form als Zugstange.


Fig. 57.

Wirken in sämtlichen Knotenpunkten aktive Kräfte, so ist nach § 16 die Gleichgewichtsform ein Seilpolygon für jene Kräfte und die Zugkraft in irgend einem Ketten-

glied gleich dem zugehörigen Polstrahl. Gewöhnlich sind diese aktiven Kräfte vertikale Lasten und die Kette samt Lasten ist symmetrisch angeordnet. Rühren diese Knotenpunktslasten von einer stetigen, über die Horizontalprojektion gleichförmig verteilten Belastung her, so ist nach § 16 bei Gleichgewicht die Kurve der Knotenpunkte eine Parabel (Konstruktion und Berechnung § 16).

§ 39. **Das Seil.**

Das Seil läßt sich betrachten als eine Kette mit unendlich vielen Gliedern von unendlich kleiner Länge. Unter Voraussetzung vollkommener Biegsamkeit um die unendlich vielen Knotenpunkte, die jedoch in der Praxis nicht zutrifft, folgt aus obigem:

Zwei benachbarte Seilelemente, in deren gemeinsamem Knotenpunkt keine aktive Kraft wirkt, fallen bei Gleichgewicht in eine Gerade.

Ist eine endliche Anzahl von Knotenpunkten von aktiven Kräften ergriffen, so ist die Gleichgewichtsform ein Seilpolygon für jene Kräfte. Ein zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ecken desselben in einer Polygonseite liegendes Seilelement erleidet Zugspannung. Für alle Seilelemente derselben Polygonseite ist diese Spannung (Seilspannung) von von gleichem Wert. Sie ist gleich dem jener Seite entsprechenden Polstrahl $\left(= \frac{H}{\cos \alpha}\right)$.

Ein unter Einfuß von äußeren Kräften im Gleichgewicht sich befindliches Seil läßt sich für die statische Berechnung in diesem Zustand als starr betrachten und

gestattet demnach die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper.

§ 40. Beispiel der analytischen Berechnung einer Seilverbindung mit festem Knoten.

Im festen Knoten C der in Figur 58 dargestellten Seilverbindung greife die Last P = 60 kg an; die von den Auflagern ausgeübten Zugkräfte (Seilspannungen in I und II) anzugeben.

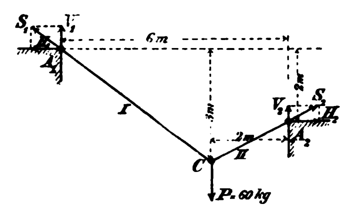


Fig. 58.

Auflösung: Im Gleichgewichtszustand läßt sich die Verbindung als starrer Körper betrachten, daher (vergl. Kapitel I):

1. Seilverbindung als Ganzes: V_1, H_1, $P = 60$, V_2, H_2 im Gleichgewicht

$\Sigma X = 0$:

1) $$-H_1 + H_2 = 0$$

$\Sigma Y = 0$:

2) $$-V_1 - V_2 + 60 = 0$$

Σ-Momente um $A_2 = 0$:

3) $$V_1 \cdot 6 - H_1 \cdot 2 - 60 \cdot 2 = 0$$

2. Freimachung des Seilstückes I in C und A_1, Momentengleichung um C:

4) $$V_1 \cdot 4 - H_1 \cdot 3 = 0.$$

Aus 3) und 4) ergeben sich die Unbekan
und H_1:

$$\underline{V_1 = 36 \text{ kg}}$$

$$\underline{H_1 = 48 \text{ kg},}$$

somit vermöge 1) $\underline{H_2 = 48 \text{ kg}}$

und vermöge 2) $\underline{V_2 = 24 \text{ kg.}}$

Probe: Freimachung des Seilstückes II i
und A_2; Momenten-Gleichung um C:

$$-V_2 \cdot 2 + H_2 \cdot 1 = 0; \quad -24 \cdot 2 + 48 \cdot 1 \equiv 0,$$

Seilspannung in I: $S_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} = \underline{60 \text{ kg}},$

Seilspannung in II: $S_2 = \sqrt{V_2^2 + H_2^2} = \underline{53{,}5 \text{ kg}}.$

§ 41. Gleichgewichtsform eines schweren homogene an zweien seiner Punkte aufgehängten Seiles.

Durch den tiefsten Punkt der Gleichgewichtskurv
gehe die vertikale y-Achse eines rechtwinkligen Koord

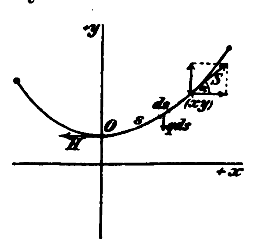


Fig. 59.

natensystems (Fig. 59). Wir schneiden im beliebig
Punkte $(x\,y)$ und im tiefsten Punkt das Seil d

und bringen am zwischenliegenden Seilstück von der Länge s in diesen Punkten die von den benachbarten Seilelementen ausgeübten Zugkräfte (Spannungen H und S) an. Die Wirkungslinien derselben fallen in die Richtungen der bezüglichen Tangenten; die Spannung H im Ursprung ist also horizontal. Außer diesen zwei Kräften greifen am zwischenliegenden Seilstück an jedem Element desselben von der Länge ds dessen Gewicht qds an (q Gewicht der Längeneinheit des Seiles). Die unendlich vielen, unendlich kleinen Lasten qds des ausgeschnittenen Seilstückes sind, wenn das Seilstück im Gleichgewichtszustande als starr betrachtet wird, mit H und S im Gleichgewicht, daher:

$\Sigma X = 0$: $$S \cdot \cos \alpha - H = 0$$

1) $$S \cdot \frac{dx}{ds} = H$$

d. h. Horizontalzug an jeder beliebigen Stelle des Seiles $= H$, also **konstant**.

$\Sigma Y = 0$: $$S \sin \alpha - \int_0^s q\,ds = 0$$

oder $$S \frac{dy}{ds} - \int_0^s q\,ds = 0,$$

somit $$d\left(S \frac{dy}{ds}\right) = q\,ds$$

und mit Benutzung des Wertes für S aus 1)

$$d\left(H \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dy}{ds}\right) = q\,ds$$

$$d\left(H\frac{dy}{dx}\right)=q\,ds=q\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{q\,dx}{H},$$

woraus durch Integration

$$l\left(\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)=\frac{qx}{H}+C,$$

und da für $x=0$ $\quad \frac{dy}{dx}=0$

(Tangente im tiefsten Punkte horizontal)

somit $\quad C=0$

sich ergibt, so kommt

$$\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=e^{\frac{qx}{H}}$$

(e Basis des natürlichen Logarithmensystems 2,71828...)

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=e^{\frac{qx}{H}}-\frac{dy}{dx}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2=e^{\frac{2qx}{H}}-2e^{\frac{qx}{H}}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{e^{\frac{2qx}{H}}-1}{2}\right)e^{-\frac{qx}{H}}=\frac{e^{\frac{qx}{H}}-e^{-\frac{qx}{H}}}{2},$$

voraus durch abermalige Integration

$$y = \frac{H}{2q}\left(e^{\frac{qx}{H}} + e^{-\frac{qx}{H}}\right) + C.$$

Wählt man den Ursprung des Koordinatensystems so, daß für $x = 0$ $\quad y = \frac{H}{q}$ wird;

so kommt $\quad C = 0$

und

$$y = \frac{H}{2q}\left(e^{\frac{qx}{H}} + e^{-\frac{qx}{H}}\right).$$

Dies ist die Gleichung einer Kettenlinie oder Seilkurve. Sie ist ein Seilpolygon von unendlich vielen Seiten, in dessen Knotenpunkten die unendlich kleinen Gewichte der Seilelemente angreifen.

§ 42. Der Riemen.

A) Grundformel des Momentes der Reibung am umschlungenen Zylinder.

An dem um den ruhenden Zylinder M (Fig. 60) geschlungenen Riemen seien die geradlinigen tangentiellen Enden in beliebigen Punkten durchgeschnitten, am zwischenliegenden Riemenstück in den Schnittstellen die Spannungen S_2 und S_1 angebracht und letztere in ihren Wirkungslinien mit ihren Angriffspunkten bis in die Berührungspunkte A und B am Zylinder verschoben. Wäre keine Reibung zwischen Riemen

Fig. 60.

und Zylinder vorhanden, so würde die größere der beiden Kräfte, z. B. S_1, ein Gleiten des Riemens über seine Unte

lage im Sinne dieser Kraft herbeiführen. Die Reibung wirkt der angestrebten Bewegung jedoch entgegen. Es sei nun S_1 der obere Grenzwert jener Kraft S_1 bei welcher der Riemen eben noch im Gleichgewicht sich befindet, wenn der Reibungswiderstand seinen größten Wert (Statik Bd. I, § 50) angenommen hat, so daß jede Vermehrung dieses Wertes von S_1 ein Gleiten des Riemens im Sinne von S_1 zur Folge hätte.

An dem ausgeschnittenen Riemenelement vom Zentriwinkel $d\varphi$ wird bei Gleichgewicht des ganzen Riemens ebenfalls Gleichgewicht herrschen, wenn an ihm in den Schnittstellen die Spannungen s und $s + ds$ angebracht werden. Diese Kräfte sind im Gleichgewicht mit dem ebenfalls am Element angreifenden Normaldruck dn des Zylinders und dem auf das Element entfallenden Reibungswiderstand dR.

In Beziehung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ursprung in der Mitte des Elementes liegt und dessen x-Achse in die Richtung desselben, also mit der Tangente zusammenfällt, ergeben somit die zwei Gleichgewichtsbedingungen (wofern als Projektionen von s und $s + ds$ auf die x-Achse bei dem geringen Unterschiede dieser drei Richtungen die Kräfte s und $s + ds$ selbst, und sämtliche Kräfte als in einem Punkte sich schneidend angenommen werden mögen):

$\Sigma x = 0$:

$$1) \qquad (s + ds) - s - dR = 0; \; dR = ds,$$

$\Sigma y = 0$:

$$2) \qquad dn - s \sin\frac{d\varphi}{2} - (s + ds) \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Woraus, wenn für den sin des sehr kleinen Winkels

$\frac{d\varphi}{2}$ der Bogen $\frac{d\varphi}{2}$ gesetzt und das unendlich kleine Glied zweiter Ordnung $ds \cdot \sin\frac{d\varphi}{2}$ gegen die übrigen Glieder erster Ordnung vernachlässigt wird,

$$dn = 2s\frac{d\varphi}{2} = s\,d\varphi.$$

Da nun (Statik Bd. I § 50)

$$dR = f \cdot dn \text{ (f Reibungskoeffizient)},$$

so kommt $dR = f \cdot s \cdot d\varphi,$

also vermöge 1) $ds = f \cdot s \cdot d\varphi$

$$\frac{ds}{s} = f \cdot d\varphi,$$

woraus durch Integration

$$ls = f\varphi + C,$$

und da für $\varphi = 0$, $s = S_2$, also $C = lS_2$,

so kommt $ls = f\varphi + lS_2$

$$l\left(\frac{s}{S_2}\right) = f\varphi$$

$$\frac{s}{S_2} = e^{f\varphi}$$

$$s = S_2 e^{f\varphi},$$

also für $\varphi = \alpha$ (Umschlingungswinkel AMB)

und $s = S_1$:

I) $S_1 = S_2 e^{f\alpha}$.

(S_1 *bedeutet die* größere, S_2 die kleinere der Spannkräfte an den Seilenden.)

Aus 1) folgt

$$dR = ds,$$

somit das Moment der Reibung am Element ds

$$dM = r dR = r ds,$$

daher das Gesamtmoment der Reibung am Umschlingungsbogen

$$M = \int_{s=S_2}^{s=S_1} r\, ds = r(S_1 - S_2)$$

oder unter Benützung der Gleichung I)

II) $$\underline{M} = (S_1 - S_2)\,\underline{r = S_2(e^{f\alpha} - 1)\,r}$$

(f Reibungskoeffizient; e die Basis des natürlichen Logarithmensystems = 2,71828...).

Anmerkung 1. Ist der Riemen in unveränderlicher Lage und wirkt am Zylinderumfang eine tangentielle Kraft P (Umfangskraft) vom Momente Pr (r Radius des Zylinders), so darf deren Moment dasjenige der Riemenreibung in Beziehung auf die Drehachse nicht übersteigen, wenn ein Gleiten des Zylinders unter dem Riemen hinweg nicht eintreten soll. Ist also der obere Grenzwert des Moments $P \cdot r$ der Drehkraft = dem Moment der Reibung, also

$$P \cdot r = S_2(e^{f\alpha} - 1) \cdot r,$$

so befindet sich der Zylinder und Riemen in der Grenzlage des Gleichgewichts und der hieraus sich ergebende Wert

III) $$\underline{P = S_2(e^{f\alpha} - 1)}$$

bezeichnet demnach die obere Grenze von P, welche *bei gegebenem* S_2 diese Kraft nicht überschreiten darf, *wenn ein Gleiten* nicht eintreten soll.

Umgekehrt bezeichnet der aus III) folgende Wert

$$\text{IV)} \qquad S_2 = \frac{P}{e^{f\alpha} - 1}$$

die untere Grenze von S_2, d. h. denjenigen Wert, welchen bei gegebenem P S_2 mindestens annehmen muß, wenn ein Gleiten nicht eintreten soll. Diesem Wert entspricht ein zugehöriger Wert von S_1:

$$\text{V)} \qquad S_1 = S_2\, e^{f\alpha} = \frac{P \cdot e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1}.$$

Anmerkung 2. Für Hanfseile läßt sich f = 0,33 (auf Holz) annehmen; man erhält somit bei n maliger Umwicklung

$$\alpha = n \cdot 2\pi$$

und somit

$$S_1 = S_2 \cdot e^{0{,}33 \cdot n \cdot 2\pi} = \text{annähernd } 8^n \cdot S_2.$$

Weiteres vergl. Bach, Maschinenelemente, Stuttgart.

B) Beispiel.

Es soll die im Zustand der Ruhe in einem über zwei Wellen geschlungenen Riemen herrschende Spannung angegeben werden, die mindestens vorhanden sein muß, damit bei eintretender Bewegung der treibenden Welle kein Gleiten des Riemens erfolgt.

Auflösung: Es sei (Fig. 61) die größere (I) die treibende Welle, dann kann ein Gleiten des Riemens nur an der getriebenen Welle stattfinden, weil dort der kleinere Umschlingungswinkel α_2 und somit nach Gleichung II) auch der kleinere Reibungswiderstand vorhanden ist.

Nach Vorigem ist der untere Grenzwert S_2 (Minimum) der Spannung im gezogenen Riemen, bei welchem unter Annahme eines tangentiellen konstanten Widerstandes W, den die getriebene Welle zu überwinden hat, ein Gleiten des Riemens bei eintretender Bewegung an dieser nicht stattfindet:

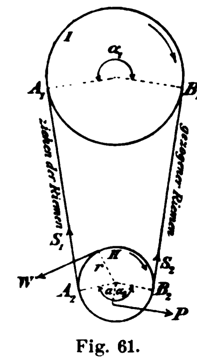


Fig. 61.

1) $$S_2 = \frac{W}{e^{f\alpha_2} - 1}$$

und der zugehörige Wert von S_1 im ziehenden Riemen:

2) $$S_1 = \frac{W \cdot e^{f\alpha_2}}{e^{f\alpha_2} - 1}.$$

Im Falle gleichförmiger Bewegung (s. Bändchen Dynamik) muß aber für die getriebene Welle die algebraische Summe der Momente sämtlicher an ihr angreifender Kräfte = 0 sein,

daher $$S_1 \cdot r - W \cdot r - S_2 \cdot r = 0,$$

woraus $$W = S_2 - S_1$$

d. h.: Die Spannungsdifferenz ist für die ganze Dauer der Bewegung konstant.

Nimmt man für den Ruhestand den Widerstand $W = 0$, so kommt für diesen Zustand

$$S_1 = S_2.$$

Es sei diese Spannung im Ruhezustand im folgenden mit S_0 bezeichnet. Nimmt man an, daß der Teil $A_1 A_2$ des elastisch gedachten Riemens beim Anwachsen der Spannung S_0 um $\triangle S$ auf den Betrag S_1 eine Verlängerung erfahre und der Teil B_1B_2 eine Verkürzung

von gleichem Wert erleide, die durch eine Abnahme von S_0 um den gleichen Betrag $\triangle S$ bis zur Erreichung des Grenzwertes S_2 herbeigeführt werde, so muß

$$S_1 - \triangle S = S_0,$$

$$S_2 + \triangle S = S_0$$

sein, woraus

$$S_0 = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

und unter Benutzung der obigen Werte 1) und 2) von S_1 und S_2

3) $$S_0 = \frac{W}{2} \cdot \frac{e^{f\alpha_2} + 1}{e^{f\alpha_2} - 1}.$$

Die Riemenspannung muß also im Ruhezustand bei gegebenem W mindestens von diesem Werte sein, wenn bei eintretender Bewegung kein Gleiten des Riemens über die getriebene Welle stattfinden soll.

Anmerkung 1. Bringt man die Gleichung 3) auf die Form

$$S_0 = \frac{W}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{e^{f\alpha_2}}}{1 - \frac{1}{e^{f\alpha_2}}},$$

so erkennt man, daß mit wachsendem Winkel α_2 der Wert von S_0 sich vermindert.

Anmerkung 2. Wirkt der Widerstand nicht tangentiell an der Welle II, sondern wie z. B. die *Kraft P am Arm* a (Fig. 61), so ersetze man diese dur

eine tangentielle Umfangskraft W von gleichem Mome
so daß also

$$W \cdot r = P \cdot a,$$

also

$$W = \frac{Pa}{r},$$

woraus aus 3)

$$4) \qquad S_0 = \frac{Pa}{2r} \cdot \frac{e^{f\alpha_2} + 1}{e^{f\alpha_2} - 1}.$$

Anmerkung 3. Zur Berechnung des nötig
Riemenquerschnitts dient die größere der Spannungen
also S_1 und zwar der Wert aus Gleichung 2).

Literatur-Verzeichnis

über

allgemeine und technische Statik.

Autenrieth, E. Lehrbuch der techn. Mechanik. Berlin, 1900.
— Stat. Berechnung der Kuppelgewölbe. Berlin, 1894.
Bach, C. Die Maschinenelemente. 8. Aufl. Stuttgart, 1901.
Bauschinger, J. Elemente der graph. Statik. München, 1871.
Cremona, L. Le figure reciproche nella statica grafica. Mailand, 1872.
Culmann, K. Die graph. Statik. 2. Aufl. Zürich, 1875.
Eddy, H. T. Neue Konstruktionen aus der graph. Statik. Leipzig, 1880.
Eytelwein, J. A. Handbuch der Statik fester Körper. 2. Auflage. Berlin, 1832.
Föppel, A. Theorie der Gewölbe. Leipzig, 1881.
— Das Fachwerk im Raume. Leipzig, 1892.
Hintz, L. Die Baustatik. 2. Aufl. Weimar, 1892.
Hoppe, O. Elementares Lehrbuch der techn. Mechanik. Leipzig, 1895.
Kayser, C. H. A. Handbuch der Statik. Karlsruhe, 1836.
Keck, W. Vorträge über graph. Statik. Hannover, 1894.
Lauenstein, R. Die graphische Statik. 2. Aufl. Stuttgart, 1893.
Levy, M. La statique graphique et ses applications aux constructions. 2. Aufl. Paris, 1886.
Müller-Breslau, H. F. B. Elemente der graph. Statik der Baukonstruktionen für Architekten und Ingenieure. Berlin, 1881.
— Die graph. Statik der Baukonstruktionen. 3. Aufl. Berlin, 1901/03.
Möbius, A. F. Lehrbuch der Statik. Leipzig, 1837.
Mohr, O. Techn. Mechanik, herausgegeben v. Ingenieur-Ver. der Techn. Hochsch. Stuttgart. Stuttgart, 1877.
Ortmann, O. Die Statik der Gewölbe mit Rücksicht auf ihre Anwendung. Halle a. S., 1876.

Ott, K. Vorträge über Baumechanik. Prag, 1888/93.
— Das graph. Rechnen und die graph. Statik. 4. Aufl. Prag, 1879/85.
Petersen, J. Lehrbuch der Statik fester Körper. Kopenhagen, 1882.
Pilgrim, L. Theorie der kreisförmigen, symmetr. Tonnengewölbe, die nur ihr eigenes Gewicht tragen. Stuttgart, 1877.
Poinsot, L. Eléments de statique. Paris, 1821. — Deutsche Ausgabe. Berlin, 1887.
Rebhann, G. Theorie der Holz- u. Eisenkonstruktionen. Wien, 1856.
— Theorie des Erddruckes und der Futtermauern. Wien, 1871.
Ritter, A. Lehrbuch der techn. Mechanik. 6. Aufl. Hannover, 1892.
— Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- u. Brückenkonstruktionen. 4. Aufl. Hannover, 1880.
— Ingenieur-Mechanik. 3. Aufl. Leipzig, 1899.
— Anwendungen der graph. Statik. Zürich, 1888/1900.
Schloesser, H. Anleitung zur stat. Berechnung von Eisenkonstruktionen im Hochau. 2. Aufl. Berlin, 1898.
Steiner, F. Die graph. Zusammensetzung der Kräfte. Wien, 1876.
Stelzel, K. Grundzüge der graph. Statik und deren Anwendung auf den kontinuierlichen Träger. Graz, 1882.
Tetmajer, L. Die äußeren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhlkonstruktionen. Zürich, 1875.
Weyrauch, J. J. v. Über die graph. Statik. Leipzig, 1874.
— Allgem. Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger. Leipzig, 1873.
— Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig, 1887.
— Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig, 1888.
Winkler, E. Neue Theorie des Erddruckes. Wien, 1872.
— Vorträge über Brückenbau. Wien, 1873/87.

eichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Theoret. Physik I. Teil: Me- u. Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, sor an der Universität Wien.) Abbildungen. Nr. 76.

kalische, v. Dr. Karl L. Schäfer, an der Universität Berlin. 5 Abbild. Nr. 21.

. Arithmetik und Algebra von erm. Schubert, Professor an elehrtenschule d. Johanneums nburg. Nr. 47.

ie, von Dr. Rob. Sieger, Priv.- n der Universität u. Professor :portakademie des k. k. Handels- ms in Wien. Mit 19 Abbild. Karte. Nr. 129.

ner, Die deutschen, v. Dr. Fuhse, Dir. d. städt. Museums i. schweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.

mskunde, Griech., v. Prof. ch. Maisch, neu bearbeitet von Dr. Franz Pohlhammer. Mit bildern. Nr. 16.

sche, von Dr. Leo Bloch, t an der Universität Zürich. Vollb. Nr. 45.

, **Techn.-Chem.**, von Dr. G. Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

, Höhere, I: Differential- ng. Von Dr. Frdr. Junker, am Realgymn. u. an der Real- t in Ulm. Mit 68 Fig. Nr. 87.

Repetitorium und Aufgaben- lung z. Differentialrechnung v. riedr. Junker, Prof. am Real- asium und an der Realanstalt n. Mit 42 Fig. Nr. 146.

: Integralrechnung. Von Dr. :. Junker, Prof. a. Realgymna- und an der Realanstalt in Ulm. 9 Fig. Nr. 88.

Repetitorium und Aufgaben- lung zur Integralrechnung von riedr. Junker, Prof. am Real- asium und an der Realanstalt n. Mit 50 Fig. Nr. 147.

ere, *von Prof. Dr. Benedikt in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.*

Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. 2765 Aufgaben, systematisch geordnet, von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearb. v. Dr. W. F. Wislicenus, Professor a. d. Universität Straßburg. Mit 36 Abbild. und einer Sternkarte. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Professor am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbild. Nr. 96.

Biologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Biologie der Tiere I: Entstehung u. Weiterbild. d. Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Professor a. d. Universität Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.

— **II:** Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Brant, Hans Sachs und Johann Fischart nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

Buchführung. Lehrgang der einfachen u. dopp. Buchhaltung von Rob. Stern, Oberlehrer der Öff. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy in Bonn. Nr. 174.

— s. auch: Religionsgeschichte, Indische.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Doz. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Waldhof. Nr. 37.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Waldhof. Nr. 38.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Cid, Der. Geschichte des Don Ruy Diaz, Grafen von Bivar. Von J. G. Herder. Hrsg. und erläutert von Prof. Dr. E. Naumann in Berlin. Nr. 36.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.

Dampfmaschine, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.

Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen in Breslau. Nr. 137.

Dietrichepen. *Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster.* Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymn. u. a. d. Realanst. in Ulm. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 42 Figuren. Nr. 146.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.

— II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Professor a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.

— II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.

— III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitgl. des Kgl. Preuß. Meteorolog. Inst. zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Tafeln. Nr. 175.

Ethik von Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Europa. Länderkunde von Europa v. Dr. Franz Heiderich, Prof. am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen u. Diagrammen u. ein. Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.

t. Textil-Industrie II:
ferei, Posamentiererei,
Gardinenfabrikation
kation von Prof. Max
ktor der Königl. Techn.
ür Textil-Industrie zu
27 Fig. Nr. 185.

haft v. Geh. Reg.-Rat
r Borght in Friedenau-
148.

m. Hans Sachs u. Joh.
. Anh.: Brant u. Hutten.
. erläut. von Professor
r. Nr. 24.

Fischzucht v. Dr. Karl
. an der Forstakademie
Abteilungsdirigent bei
ion des forstlichen Ver-
Nr. 159.

ung, Mathemat., u.
d. Mathematik, enth. die
rmeln und Lehrsätze d.
Algebra, algebraischen
nen Geometrie, Stereo-
n u sphärischen Trigo-
th. Geographie, analyt.
Ebene u. d. Raumes, d.
Integralrechn. v. O Th.
f. am kgl. Realgymn. in
. Mit 18 Fig. Nr. 51.
ie, von G. Mahler,
Gymnasium in Ulm.

aft von Dr. Ad. Schwap-
r an der Forstakademie
Abteilungsdirigent bei
ion des forstlichen Ver-
Nr. 106.

Das, im Deutschen
lf Kleinpaul in Leipzig.

ikation. Textil-In-
eberei, Wirkerei, Posa-
Spitzen- und Gardinen-
nd Filzfabrikation von
Gürtler, Direktor der
ischen Zentralstelle für
ie zu Berlin. Mit 27
185.

Geodäsie von Dr. C. Reinhertz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.

Geographie, Astronomische, von Dr. Siegm. Günther, Professor a. d. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

— **Physische,** von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

— siehe auch: Landeskunde. — Länderkunde.

Geologie v. Professor Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Tafeln mit über 50 Figuren. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene v. Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.

— **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

— **Darstellende,** v. Dr. Rob. Haußner, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. I. Mit 100 Figuren. Nr. 142.

— **Ebene,** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.

— **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 85 zum Teil zweifarb. Figuren. Nr. 72.

Geschichte, Bayerische, von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

— **Deutsche, im Mittelalter** (bis 1500) von Dr. F. Kurze, Oberl. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.

— **Französische,** von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. Berlin. Nr. 85.

— **Griechische,** von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an der deutschen Universität Prag. Nr. 49.

— **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Professor an der Universität München. Mit 6 Bildern und 1 Karte. Nr. 43.

Geschichte, Österreichische, I: Von der Urzeit bis 1526 von Hofrat Dr. Franz von Krones, Professor an der Universität Graz. Nr. 104.
— — II: Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 105.
— **Römische,** neubearb. von Realgymnasialdirektor Dr. Julius Koch. Nr. 19.
— **Russische,** von Dr. Wilhelm Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.
— **Sächsische,** von Prof. Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
— **Schweizerische,** von Dr. K. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.
— **der Malerei** siehe: Malerei.
— **der Musik** siehe: Musik.
— **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.
— **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberrealschuldirektor in Freiburg i. B. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machacek in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Götter- und Heldensage, Griechische und römische, von Dr. Herm. Steuding, Professor am Kgl. Gymnasium in Wurzen. Nr. 27.
— siehe auch: Heldensage. — Mythologie.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

Grammatik, Griechische, I: Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, [illegible] an der Klosterschule zu Maulb[ronn]. Nr. 117.
— — II: Bedeutungslehre und S[yntax] von Dr. Hans Meltzer, Profess[or an] der Klosterschule zu Maulb[ronn]. Nr. 118.
— **Lateinische.** Grundriß der [latei]nischen Sprachlehre von Pro[f.] Dr. W. Votsch in Magdeburg. [Nr. ...]
— **Mittelhochdeutsche.** Der [Nibe]lunge Nôt in Auswahl und m[ittel]hochdeutsche Grammatik mit k[urzem] Wörterbuch von Dr. W. Go[lther,] Professor an der Universität R[ostock]. Nr. 1.
— **Russische,** von Dr. Erich Ber[neker,] Professor an der Universität [...] Nr. 66.
— — siehe auch: Russisches Gesp[rächs]buch, — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deut[sche,] von Prof. Th. de Beaux, Oberl[ehrer] an der Öffentlichen Handels[lehr]anstalt und Lektor an der Han[dels]hochschule zu Leipzig. Nr. 18[2.]
— **Französische,** von Professor [Th.] de Beaux, Oberlehrer an der Ö[ffent]lichen Handelslehranstalt und [Lektor] an der Handelshochschule zu Le[ipzig.] Nr. 183.

Harmonielehre von A. Halm. [Mit] vielen Notenbeilagen. Nr. 12[0.]

Hartmann von Aue, Wolfram [von] Eschenbach und Gottfried [von] Straßburg. Auswahl aus [dem] höfischen Epos mit Anmerk[ungen] und Wörterbuch von Dr. K. M[arold,] Professor am Königlichen Fried[richs]kollegium zu Königsberg i[. Pr.] Nr. 22.

Hauptliteraturen, Die, d. Ori[ents] von Dr. M. Haberlandt, P[rivat]dozent an der Universität [Wien.] I. II. Nr. 162. 163.

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert. Kulturhistorische Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Professor Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel und 30 Abbildungen. Nr. 93.

Lessings Emilia Galotti. Mit Einleitung und Anmerkungen von Oberlehrer Dr. Votsch. Nr. 2.

— **Fabeln,** nebst Abhandlungen mit dieser Dichtungsart verwandten Inhalts. Mit Einleitung von Karl Goedeke. Nr. 3.

— **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschek. Nr. 5.

— **Nathan der Weise.** Mit Anmerkungen von den Professoren Denzel und Kraz. Nr. 6.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

Literatur, Althochdeutsche, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Professor am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmale des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen in Breslau. Nr. 181.

Literaturen, Die, des Orients. I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 162.

— — II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 163.

Literaturgeschichte, Deutsche, von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von *Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Nr. 161.*

Literaturgeschichte, Deutsche, des 19. Jahrhunderts von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. I. II. Nr. 134. 135.

— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Professor an der Universität Greifswald Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Voßler, Professor a. d. Universität Heidelberg. Nr. 125.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

— **Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Professor an der Universität Breslau. Nr. 107—111.

Fortsetzung auf der 8. Vorsatzseite

ische Formelsammlung ...titorium der Mathematik ...h Bürklen, Professor am ...ealgymnasium in Schwäb.- ... Mit 18 Fig. Nr. 51.

... Theoret. Physik I. Teil: ... und Akustik. Von Dr. ...äger, Prof an der Univ. ...it 19 Abbild. Nr. 76.

...nde, Physische, von Dr. ...Schott, Abteilungsvorsteher ...eutschen Seewarte in Ham- ...it 28 Abbild. im Text und ... Nr. 112.

...gie von Dr. W. Trabert, ... d. Universität u. Sekretär ...entralanstalt für Meteoro- ...Wien. Mit 49 Abbildungen ...feln. Nr. 54.

...ie von Dr. R. Brauns, ...an der Universität Gießen. ...Abbildungen. Nr. 29.

... und Spruchdichtung. ...v. d. Vogelweide mit Aus- ... Minnesang und Spruch- ... Mit Anmerkungen und ...Wörterbuch von Otto ...Professor an der Oberreal- ... an der Techn. Hochschule ...art. Nr. 23.

...gie, Anatomie u. Phy- ...der Pflanzen. Von Dr. ...a, Prof. a d. Techn. Hochsch. ... Mit 50 Abbild. Nr. 141.

...homas. Martin Luther, ...Murner und das Kirchenlied ...Jahrh. Ausgewählt und ...itungen und Anmerkungen ...von Prof. G. Berlit, Oberl. ...igymn. zu Leipzig. Nr. 7.

...schichte der alten und ...terlichen, von Dr. A. ... Mit zahlreichen Abbild. ...fbeilagen. Nr. 121.

...e Formenlehre (Kom- ...slehre) v. Stephan Krehl. ...it vielen Notenbeispielen. ...50.

...ichte des 19. Jahr- ... von Dr. K. Grunsky in ... I. II. Nr. 164. 165.

Mythologie, Deutsche, von Dr. Friedrich Kauffmann, Professor an der Universität Kiel. Nr. 15.

— siehe auch: Götter- u. Heldensage. — Heldensage.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

Nibelunge, Der, Nôt in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Professor an der Universität Rostock. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftlichen Versuchsanstalt Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Paläontologie v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Perspektive nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Fachlehrer an der Kunstgewerbeschule in Magdeburg. Mit 88 Abbildungen. Nr. 57.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Mit vielen Abbild. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie von Dr. W. Migula, Professor an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Professor an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Figuren. Nr. 122.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.

Philosophie, Einführung in die. Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie. Von Prof. H. Keßler, Fachlehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Poetik, Deutsche, von Dr. K. Borinski, Dozent an der Universität München. Nr. 40.

Posamentiererei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Ind. zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der Dr. G. F. Lipps in Leipzig. 3 Figuren. Nr. 98.

Rechnen, Kaufmännisches, Richard Just, Oberlehrer a Öffentlichen Handelslehransta Dresdener Kaufmannschaft. I. Nr. 139. 140. 187.

Rechtslehre, Allgemeine, vo Th. Sternberg in Charlotten I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Redelehre, Deutsche, v. Hans P Gymnasiallehrer in München. einer Tafel. Nr. 61.

Religionsgeschichte, Indische Professor Dr. Edmund Hard Bonn. Nr. 83.

— — siehe auch Buddha.

Religionswissenschaft, Abriß vergleichenden, von Prof. D Achelis in Bremen. Nr. 208.

Russisch-Deutsches Gespräch von Dr. Erich Berneker, Profes der Universität Prag. Nr. 68

Russisches Lesebuch mit Glossa Dr. Erich Berneker, Professor Universität Prag. Nr. 67.

— — siehe auch: Grammatik.

Sachs, Hans, u. Johann Fis nebst einem Anhang: Bran Hutten. Ausgewählt und erl von Prof. Dr. Julius Sahr.

Schmarotzer u. Schmarotz in der Tierwelt. Erste Einfü in die tierische Schmarotze v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. a. d. Univers. Gießen. Mit bildungen. Nr. 151.

Schulpraxis. Methodik der schule von Dr. R. Seyfert, Sc in Ölsnitz i. V. Nr. 50.

Simplicius Simplicissimus Hans Jakob Christoffel v. Grin hausen. In Auswahl heraus von Professor Dr. F. Bo Dozent an der Universität B Nr. 138.

Soziologie von Prof. Dr. Achelis in Bremen. Nr. 1

Spitzenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Sprachdenkmäler, Gotische, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Jantzen in Breslau. Nr. 79.

Sprachwissenschaft, Indogermanische, von Dr. R. Meringer, Prof. an der Universität Graz. Mit einer Tafel. Nr. 59.

— **Romanische,** von Dr. Adolf Zauner, k. k. Realschulprofessor in Wien. Nr. 128.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, Privatdozent an d. Universität Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Statik, I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper von W. Hauber, diplom. Ingenieur. Mit 82 Fig. Nr. 178.

— — II. Teil: Angewandte Statik. Mit zahlreichen Figuren. Nr. 179.

Stenographie. Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einigungssystem Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken und einem Anhang von Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses in Oranienstein. Nr. 86.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Privatdozent in Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 97.

Stilkunde von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.

Technologie, Allgemeine chemische, *von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.*

Telegraphie, Die elektrische, von Dr. Ludwig Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Dir. der Königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Tierbiologie I: Entstehung und Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 33 Abbildungen. Nr. 131.

— **II:** Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Gießen. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Figuren. Nr. 99.

Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

Urgeschichte der Menschheit v. Dr. Moritz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 42.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 25.

Volkswirtschaftslehre v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Geh. Regierungsrat Dr. R. van der Borght, vortr. Rat im Reichsamt des Innern in Berlin. Nr. 177.

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Professor Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. a d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

Wärme. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Weberei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Wechselkunde von Dr. Georg Funk in Mannheim. Mit vielen Formularen. Nr. 103.

Wirkerei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Wolfram von Eschenbach. mann v. Aue, Wolfram v. bach und Gottfried von Stra Auswahl aus dem höf. Ep Anmerkungen und Wörterbu Dr. K. Marold, Professor a Friedrichskollegium zu Kön i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch, Deutsches, v Ferdinand Detter, Professor Universität Prag. Nr. 64.

Württemberg. Landeskund Königreichs Württemberg v Kurt Hassert, Professor de graphie an der Handelsho in Köln. Mit 16 Vollbild 1 Karte. Nr. 157.

Zeichenschule von Prof. K. K in Ulm. Mit 17 Tafeln in Farben- und Golddruck u. 13 und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, Becker, Architekt und Lehrer Baugewerkschule in Magdebu bearbeit. von Prof. J. Von diplom. und staatl. gepr. In in Breslau. Mit 290 Fig. Tafeln im Text. Nr. 58.












AUG 2 7 1934

